



**ΤΑΞΗ:** Γ' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
**ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ:** ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ / ΣΠΟΥΔΩΝ  
ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ  
**ΜΑΘΗΜΑ:** ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

**Ημερομηνία: Τετάρτη 5 Μαΐου 2021**  
**Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες**

## ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

### Θέμα Α

**A1.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$  και  $x_0$  ένα εσωτερικό σημείο του  $\Delta$ .

Αν η  $f$  παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο  $x_0$  και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, να αποδείξετε ότι  $f'(x_0) = 0$ .

**Μονάδες 7**

**A2.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Τι ονομάζουμε κρίσιμα σημεία της  $f$  στο διάστημα  $\Delta$ ;

**Μονάδες 4**

**A3.** Να διατυπώσετε το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών.

**Μονάδες 4**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $-f$  είναι συμμετρική ως προς τον άξονα  $y'y$  της γραφικής παράστασης  $f$ .

**β)** Για κάθε συνάρτηση  $f$  για την οποία υπάρχει το  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  και  $f(x) > 0$  κοντά στο  $x_0$ ,

ισχύει  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$ .

- γ) Αν για μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα διάστημα  $[\alpha, \beta]$  ισχύουν:  
 $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$  και  $f(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in (\alpha, \beta)$ , τότε η  $f$  δεν είναι συνεχής στο  $[\alpha, \beta]$ .
- δ) Υπάρχουν συναρτήσεις που είναι συνεχείς σ' ένα σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού τους και δεν είναι παραγωγίσιμες σ' αυτό.
- ε) Για κάθε συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  που είναι παραγωγίσιμη και δεν παρουσιάζει ακρότατο ισχύει:  $f'(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

Μονάδες 10

**Θέμα Β**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = 1 + \sqrt{1-x}$ ,  $x \leq 1$ .

**B1.** Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 1}{x^2 - 3x + 2}$

Μονάδες 5

**B2.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την αντίστροφή της.

Μονάδες 8

**B3.** Αν  $f^{-1}(x) = -x^2 + 2x$  με  $x \geq 1$  να ορίσετε τη συνάρτηση  $f^{-1} \circ g$ , όπου  $g(x) = \ln x$ .

Μονάδες 4

**B4.** Αν  $\varphi(x) = (f^{-1} \circ g)(x) = -(\ln x)^2 + 2 \ln x$ ,  $x \geq e$ .

**α)** Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση  $\varphi$

Μονάδες 4

**β)** Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $\varphi$  έχει ένα σημείο καμπής που ανήκει στον άξονα  $x'x$ .

Μονάδες 4

**Θέμα Γ**

$$\text{Δίνεται η συνεχής συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} -x^3 + \alpha, & x \leq 0 \\ \frac{x - \sin x + 1}{x}, & x > 0 \end{cases}.$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι  $\alpha = 1$  και στη συνέχεια να εξετάσετε αν η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0 = 0$ .

**Μονάδες 6**

Γ2. Να αποδείξετε ότι  $f(x) < \frac{1}{2}x + 1$  για κάθε  $x > 0$ .

**Μονάδες 6**

Γ3. Να βρείτε την οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της  $f$  όταν  $x \rightarrow +\infty$ .

**Μονάδες 6**

Γ4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα σημείο της γραφικής παράστασης της  $f$ , με τετμημένη  $x_0 < 0$ , στο οποίο η εφαπτομένη διέρχεται από το σημείο  $A(1, -1)$ .

**Μονάδες 7****Θέμα Δ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = e^x - 1 - \ln(x+1)$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  για  $x = 0$  παρουσιάζει ελάχιστο.

**Μονάδες 5**

Δ2. Θεωρούμε τη συνάρτηση  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει:

$$|g(x) - g(y)| \leq (x - y)^2 \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι η  $g$  είναι σταθερή.

**Μονάδες 5**

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2021  
Β' ΦΑΣΗ

E\_3.Μλ3Θ0(ε)

**Δ3.** Αν  $g(0) = 21$ , να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = g(x)$  με  $x \in (-1, +\infty)$  έχει ακριβώς μια θετική και μια αρνητική λύση.

(όπου  $g$  η συνάρτηση του ερωτήματος **Δ2**)

Μονάδες 7

**Δ4.** Αν  $\rho_1 < 0 < \rho_2$  οι λύσεις της εξίσωσης του ερωτήματος **Δ3**, να αποδείξετε ότι:

**α)** Υπάρχουν  $\xi_1, \xi_2 \in (\rho_1, \rho_2)$  με  $\xi_1 \neq \xi_2$ , τέτοιοι ώστε :  $\rho_1 \cdot f'(\xi_1) = \rho_2 \cdot f'(\xi_2)$

Μονάδες 4

**β)**  $0 \leq f(x) < 21$  για κάθε  $x \in (\rho_1, \rho_2)$ .

Μονάδες 4

Καλή επιτυχία