



ΤΑΞΗ: Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ημερομηνία: Σάββατο 9 Ιανουαρίου 2021
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 43 (Ιδιότητες εσωτερικού γινομένου)

A2. α. Ψευδής

β. Επειδή $\vec{a} \not\perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{\beta} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}|$ αφού η γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα είναι π .

A3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 23 (Γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων)

- A4.** 1.Λάθος,
2.Σωστό,
3.Σωστό,
4.Λάθος,
5.Σωστό

ΘΕΜΑ Β

B1. Οι συντεταγμένες της κορυφής Α προκύπτουν από τη λύση του συστήματος των εξισώσεων των δύο ευθειών

$$\begin{cases} 2x + y - 5 = 0 \\ x - 4y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 5 \\ -2x + 8y = 4 \end{cases}$$

Με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει ότι : $9y = 9 \Leftrightarrow y = 1$.

Με αντικατάσταση σε μία από τις δύο αρχικές εξισώσεις προκύπτει ότι $x = 2$.
Άρα $A(2, 1)$

- B2.** Επειδή η εξίσωση της πλευράς ΒΓ είναι παράλληλη στη (ζ) θα ισχύει ότι $\lambda_{B\Gamma} = \lambda_z = 3$ και αφού η ΒΓ διέρχεται από το Β έχουμε ότι :

$$y - 4 = 3(x + 2) \Leftrightarrow y = 3x + 10$$

- B3.** Αφού $B\Delta \perp A\Gamma \Leftrightarrow \lambda_{B\Delta} \cdot \lambda_{A\Gamma} = -1$ και επειδή $\lambda_{B\Delta} = -1$ προκύπτει ότι

$\lambda_{A\Gamma} = 1$ και αφού η ΑΓ διέρχεται από το Α έχουμε ότι :

$$y - 1 = x - 2 \Leftrightarrow y = x - 1$$

Οι συντεταγμένες της κορυφής Γ προκύπτουν από τη λύση του συστήματος των εξισώσεων των ευθειών ΑΓ και ΒΓ

$$\begin{cases} y = x - 1 \\ y = 3x + 10 \end{cases}$$

Εξισώνοντας τις δύο σχέσεις προκύπτει $x - 1 = 3x + 10 \Leftrightarrow x = -\frac{11}{2}$.

Με αντικατάσταση σε μία από τις δύο προκύπτει ότι $y = -\frac{13}{2}$.

Άρα $\Gamma(-\frac{11}{2}, -\frac{13}{2})$

ΘΕΜΑ Γ

- Γ1.** Γνωρίζουμε ότι: $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \sin(\widehat{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}})$, όπου $0 \leq (\widehat{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}) \leq \pi$ (1).

Απαιτείται να υπολογίσουμε το $\sin(\widehat{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}})$. Από την γνωστή

τριγωνομετρική ταυτότητα $\sin^2(\widehat{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}) + \eta\mu^2(\widehat{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}) = 1$,

αν αντικαταστήσουμε $\eta\mu(\widehat{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}) = \frac{3}{5}$, προκύπτει $\sigma\upsilon\nu^2(\widehat{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}) = \frac{16}{25}$ οπότε, $\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}) = \frac{4}{5}$ ή $\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}) = -\frac{4}{5}$. Αντικαθιστούμε στην αρχική σχέση

$$|\vec{\alpha}| = 1, |\vec{\beta}| = 5 \text{ οπότε έχουμε, } \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 4 \text{ ή } \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -4.$$

Επειδή η $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$ είναι οξεία, το $\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}) > 0$, άρα $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 4$.

Γ2. $|5\vec{\alpha} - \vec{\beta}|^2 = (5\vec{\alpha} - \vec{\beta})^2 = 25\vec{\alpha}^2 - 10\vec{\alpha}\vec{\beta} + \vec{\beta}^2 = 25 - 10 \cdot 4 + 25 = 10.$

Άρα, $|5\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = \sqrt{10}.$

Γ3. Τα διανύσματα $\vec{v} = (\vec{\alpha}\vec{\beta})\vec{\alpha} - x\vec{\beta} = 4\vec{\alpha} - x\vec{\beta}$, $\vec{\beta}$ είναι κάθετα επομένως, $\vec{v} \cdot \vec{\beta} = 0 \Leftrightarrow (4\vec{\alpha} - x\vec{\beta})\vec{\beta} = 0 \Leftrightarrow 4\vec{\alpha}\vec{\beta} - x\vec{\beta}^2 = 0 \Leftrightarrow 4 \cdot 4 - 25x = 0 \Leftrightarrow 16 = 25x \Leftrightarrow x = \frac{16}{25}.$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Το μέσον Κ του ευθύγραμμου τμήματος ΒΓ είναι $K\left(\frac{x_B+x_G}{2}, \frac{y_B+y_G}{2}\right)$ ή

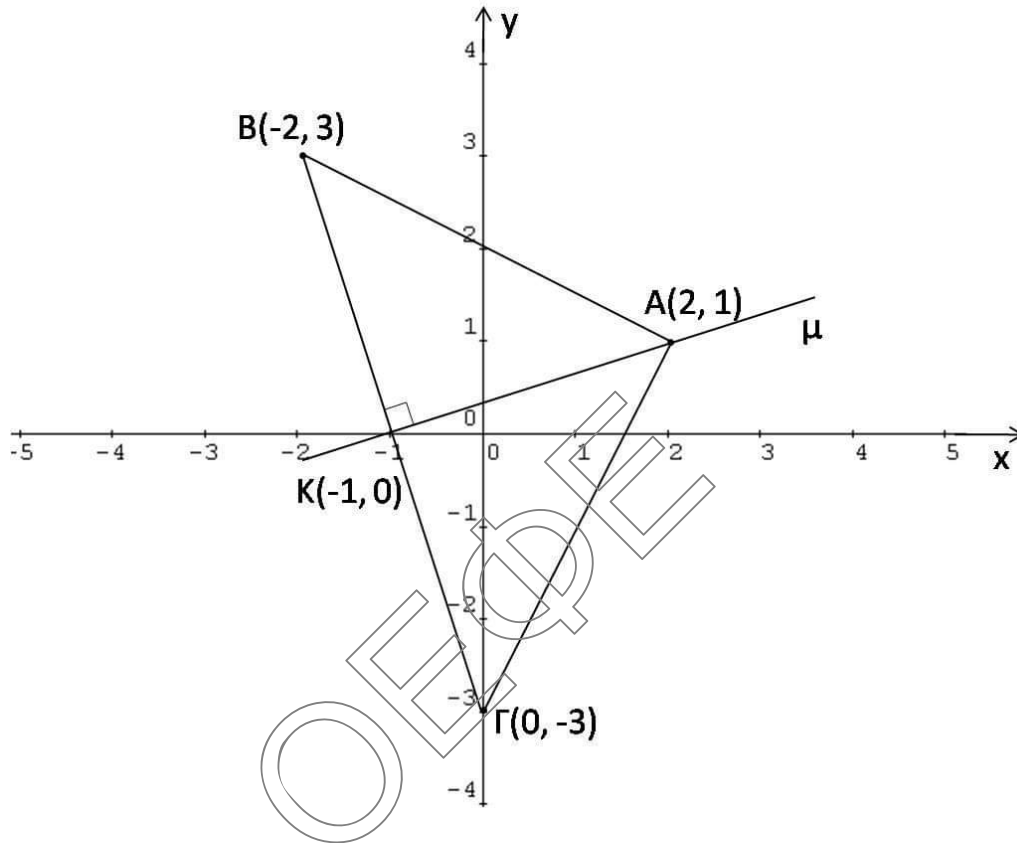
$$K(-1, 0).$$

Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας στην οποία ανήκει η πλευρά ΒΓ

$$\text{είναι : } \lambda_{BG} = \frac{y_G - y_B}{x_G - x_B} = \frac{-3 - 3}{0 - (-2)} = -3.$$

Αφού $BG \perp \mu \Leftrightarrow \lambda_{BG} \cdot \lambda_{\mu} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{\mu} = \frac{1}{3}$ και αφού η μ διέρχεται

$$\text{από το Κ έχουμε ότι } \mu : y - 0 = \frac{1}{3}(x - (-1)) \Leftrightarrow y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}.$$



Δ2. Αφού το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι ισοσκελές με $\hat{A} = 90^\circ$ ισχύει :

- $ΑΒ = ΑΓ$. Επομένως το A ισαπέχει από τα σημεία B και Γ . Άρα βρίσκεται κατ'ανάγκη στη μεσοκάθετη μ του ευθυγράμμου τμήματος $B\Gamma$. Επομένως οι συντεταγμένες του ικανοποιούν τον τύπο της

$$\mu: y_A = \frac{1}{3}x_A + \frac{1}{3} . \text{ Έτσι είναι } A(x_A, \frac{1}{3}x_A + \frac{1}{3}) \text{ με } x_A > 0 .$$

- $\hat{A} = 90^\circ \Leftrightarrow \overrightarrow{ΑΒ} \perp \overrightarrow{ΑΓ} \Leftrightarrow \overrightarrow{ΑΒ} \cdot \overrightarrow{ΑΓ} = 0$ (1)

$$\text{Όμως } \overrightarrow{ΑΒ} = (-2 - x_A, 3 - \frac{1}{3}x_A - \frac{1}{3}) = (-2 - x_A, -\frac{1}{3}x_A + \frac{8}{3})$$
 (2)

$$\text{Όμως } \overrightarrow{ΑΓ} = (0 - x_A, -3 - \frac{1}{3}x_A - \frac{1}{3}) = (-x_A, -\frac{1}{3}x_A - \frac{10}{3})$$
 (3)

$$(1) \xrightarrow{(2),(3)} (-2 - x_A)(-x_A) + \frac{1}{3}(8 - x_A)(-\frac{1}{3})(10 + x_A) = 0 \Rightarrow$$

$$2x_A + x_A^2 - \frac{1}{9}(80 + 8x_A - 10x_A - x_A^2) = 0 \Rightarrow x_A^2 + 2x_A - 8 = 0$$
$$\Rightarrow x_A = 2 \text{ ή } x_A = -4$$

Και αφού $x_A > 0$ είναι $x_A = 2$ και $y_A = \frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{1}{3} = 1$. Άρα **A (2, 1)**

Δ3. $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{M\Gamma} + \overrightarrow{MA}^2 = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{M\Gamma} \Leftrightarrow$

$$\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{M\Gamma} - \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{M\Gamma} = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}^2 \Leftrightarrow$$

$$(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}) \cdot \overrightarrow{M\Gamma} = \overrightarrow{MA} \cdot (\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{M\Gamma} = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{M\Gamma} - \overrightarrow{MA}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{A\Gamma} \text{ που ισχύει από}$$

την υπόθεση. Λόγω των ισοδυναμιών, η αλήθεια της τελευταίας

σημαίνει και την αλήθεια της αρχικής.