ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2020
Β΄ ΦΑΣΗ

Ε_3.Μλ3ΘΟ(α2)

ΤΑΞΗ: **Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: **ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ / ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ**
ΜΑΘΗΜΑ: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ / ΑΠΟΦΟΙΤΟΙ**

Ημερομηνία: Κυριακή 24 Μαΐου 2020
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη σχολικού βιβλίου σελίδα 133

Α2. **(i)** α) Δεν υπάρχει το όριο της στο x_0 ή

β) Υπάρχει το όριο της στο x_0 αλλά είναι διαφορετικό από την τιμή της $f(x_0)$ στο σημείο x_0

(ii) Σελίδα 185 σχολικού βιβλίου ορισμός .

Α3. Ο ισχυρισμός είναι ψευδής ,για παράδειγμα η συνάρτηση $f(x)=e^x$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ αλλά δεν έχει ούτε μέγιστο ούτε ελάχιστο

Α4.

(α) Σωστό
(β) Σωστό
(γ) Λάθος
(δ) Λάθος
(ε) Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. Εφόσον η f συνεχής στο $\mathbb{R}$ θα είναι συνεχής και στο $x=0$, επομένως

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) \quad \textbf{(1)}$$

- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^2+\alpha^2\right) = \alpha^2$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(e^{-x}+2\alpha-2\right) = 2\alpha-1$
- $f(0)=\alpha^2$

Λόγω της **(1)** : $\alpha^2 = 2\alpha-1 \Leftrightarrow \alpha^2-2\alpha+1=0 \Leftrightarrow (\alpha-1)^2=0 \Leftrightarrow \alpha=1$

Άρα $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x\le 0 \\ e^{-x} & x>0 \end{cases}$

- $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^2+1-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} x = 0$
- $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^{-x}-1}{x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x\to 0^-}\left(-e^{-x}\right) = 1$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ το οποίο είναι εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της άρα είναι κρίσιμο σημείο.

Β2. **(i)** Η f παραγωγίσιμη στο διάστημα $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ με $f'(x)=\begin{cases} 2x & ,x<0 \\ -e^{-x} & x>0 \end{cases}$

Για $x<0$ έχουμε $f'(x)=2 \Leftrightarrow 2x=2 \Leftrightarrow x=1$ απορρίπτεται .

Για $x>0$ έχουμε $-e^{-x}=2 \Leftrightarrow e^{-x}=-2$ αδύνατη .

(ii) Για κάθε $x<0$ έχουμε : $f'(x)<0$ και επειδή η f συνεχής στο $x=0$ θα είναι γνησίως φθίνουσα στο $A_1=(-\infty,0]$ και το σύνολο τιμών της θα είναι

$$f(A_1)=\left[f(0),\lim_{x\to-\infty} f(x)\right)=[1,+\infty)$$

Για κάθε $x>0$ $f'(x)<0$ και επειδή η f συνεχής στο $x_0=0$ θα είναι γνησίως φθίνουσα στο $A_2=[0,+\infty)$ και το σύνολο τιμών της θα είναι

$$f(A_2)=\left(\lim_{x\to+\infty} f(x),f(0)\right]=(0,1]$$

Επομένως το σύνολο τιμών της f είναι το διάστημα $(0,+\infty)$

Β3. Η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το πεδίο ορισμού της άρα είναι 1-1 οπότε αντιστρέφεται.

Η εξίσωση $y = x^2 + 1$ με $x \le 0$ και $y \in [1, +\infty)$ ισοδύναμα γίνεται :

$$x^2 = y - 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{y-1} \Leftrightarrow |x| = \sqrt{y-1} \Leftrightarrow -x = \sqrt{y=1} \Leftrightarrow x = -\sqrt{y-1}$$

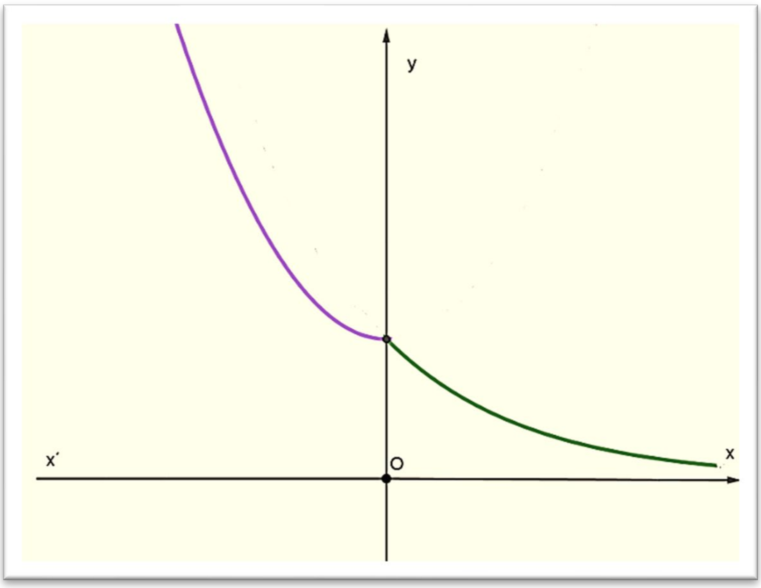
Η εξίσωση $y = e^{-x}$ με $x > 0$ και $y \in (0,1)$ ισοδύναμα γίνεται :

$$y = e^{-x} \Leftrightarrow -x = \ln y \Leftrightarrow x = -\ln y$$

Άρα η αντίστροφη της f είναι : $f^{-1}(x) = \begin{cases} -\ln x, & 0 < x < 1 \\ -\sqrt{x-1}, & x \ge 1 \end{cases}$

Β4. Για την $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, x \le 0 \\ e^{-x} \quad x > 0 \end{cases}$ ισχύει ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ επομένως το ζητούμενο εμβαδόν είναι :

$$E(\Omega) = \int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{0} (x^2 + 1)dx + \int_{0}^{1} e^{-x}dx = \left[\frac{x^3}{3} + x\right]_{-1}^{0} + \left[-e^{-x}\right]_{0}^{1} = \frac{7}{3} - \frac{1}{e} \text{ τ.μ.}$$



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f παραγωγίσιμη στο $A=(0,+\infty)$ με $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1-\ln x}{x^2}=0 \Leftrightarrow 1-\ln x=0 \Leftrightarrow \ln x=1 \Leftrightarrow x=e$$

$$f'(x)>0 \Leftrightarrow \frac{1-\ln x}{x^2}>0 \Leftrightarrow 1-\ln x>0 \Leftrightarrow \ln x<1 \Leftrightarrow 0<x<e$$

$$f'(x)<0 \Leftrightarrow \frac{1-\ln x}{x^2}<0 \Leftrightarrow 1-\ln x<0 \Leftrightarrow \ln x>1 \Leftrightarrow x>e$$

Η f γνησίως αύξουσα στο $A_1=(0,e]$ και γνησίως φθίνουσα στο $A_2=[e,+\infty)$ ενώ στη θέση $x=e$ έχει μέγιστο το $f(e)=\frac{1}{e}$

Βρίσκοντας την f'' έχουμε : $f''(x)=\frac{2\ln x-3}{x^3}$

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow \frac{2\ln x-3}{x^3}=0 \Leftrightarrow 2\ln x-3=0 \Leftrightarrow 2\ln x=3 \Leftrightarrow \ln x=\frac{3}{2} \Leftrightarrow x=e^{\frac{3}{2}}$$

$$f''(x)>0 \Leftrightarrow \frac{2\ln x-3}{x^3}>0 \Leftrightarrow 2\ln x-3>0 \Leftrightarrow 2\ln x>3 \Leftrightarrow \ln x>\frac{3}{2} \Leftrightarrow x>e^{\frac{3}{2}}$$

$$f''(x)<0 \Leftrightarrow \frac{2\ln x-3}{x^3}<0 \Leftrightarrow 2\ln x-3<0 \Leftrightarrow 2\ln x<3 \Leftrightarrow \ln x<\frac{3}{2} \Leftrightarrow x<e^{\frac{3}{2}}$$

Άρα η f κοίλη στο $\left(0,e^{\frac{3}{2}}\right]$ και κοίλη στο $\left[e^{\frac{3}{2}},+\infty\right)$ ενώ το σημείο $\left(e^{\frac{3}{2}},f\left(e^{\frac{3}{2}}\right)\right)$ ή $\left(e^{\frac{3}{2}},\frac{3}{2e^{\frac{3}{2}}}\right)$ είναι το σημείο καμπής της.

Γ2. Η εξίσωση $g(x)=h(x)$ ορίζεται στο $(0,+\infty)$ άρα

$$e^x=x^e \Leftrightarrow x=\ln x^e \Leftrightarrow x=e\ln x \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x}=\frac{1}{e} \Leftrightarrow f(x)=\frac{1}{e} \Leftrightarrow x=e$$

Ισχύει $f(x)\le f(e)$ για κάθε $x>0$ και η ισότητα ισχύει για $x=e$

Οι συναρτήσεις g,h είναι παραγωγίσιμες στο $(0,+\infty)$ με $g'(x)=e^x$ και $h'(x)=ex^{e-1}$

και στο κοινό τους σημείο έχουμε: $g'(e)=e^e$ και $h'(e)=e\cdot e^{e-1}=e^e$

Δηλαδή οι $C_{g,}C_h$ έχουν κοινό σημείο με τετμημένη $x=e$ και $g'(e)=h'(e)$ οπότε έχουν κοινή εφαπτομένη στο κοινό τους σημείο .

Γ3. Θεωρούμε $\varphi(x)=\left(f(3)-f(2)\right)\left(e^{x+1}-e\right)+(x-1)\left(1-ef(x)\right)$ με $x\in(0,+\infty)$

Ισχύει : $\lim\limits_{x\to 0^+}\varphi(x)=-\infty$ διότι :

$$\lim_{x\to 0^+}\left(f(3)-f(2)\right)\left(e^{x+1}-e\right)=0 \text{ και } \lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{x}=-\infty$$

Άρα : $\lim\limits_{x\to 0^+}(x-1)\left(1-ef(x)\right)=(-1)\cdot\left[1-(-\infty)\right]=(-1)\cdot(+\infty)=-\infty$

Δηλαδή : $\varphi(x)<0$ για τιμές του x κοντά στο μηδέν άρα θα υπάρχει $x_1>0$ τέτοιο ώστε $\varphi(x_1)<0$

Επίσης $\varphi(1)=\left(f(3)-f(2)\right)\left(e^2-e\right)=\left(\frac{\ln 3}{3}-\frac{\ln 2}{2}\right)\left(e^2-e\right)>0$

Διότι $\frac{\ln 3}{3}-\frac{\ln 2}{2}=\frac{2\ln 3-3\ln 2}{6}=\frac{\ln 9-\ln 8}{6}>0$ και $e^2-e>0$

Άρα η φ είναι συνεχής στο $[x_1,1]\subseteq(0,+\infty)$ και $\varphi(x_1)\cdot\varphi(1)<0$ οπότε από θεώρημα Bolzano υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $\varphi(x)=0$ στο $(0,1)$

Γ4. Να βρεθεί ο $\nu\in\mathbb{N}$ με $\nu>3$ ώστε $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu\left(\nu^2x\right)}{2^\nu x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2020^{f(x)}+2021^{f(x)}}{2020^{f(x)}-2021^{f(x)}}$

Για το $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu\left(\nu^2x\right)}{2^\nu x}$ κάνουμε την αντικατάσταση $u=\nu^2x$ άρα όταν $x\to 0$ τότε $u\to 0$

Επομένως το όριο γίνεται : $\lim\limits_{u\to 0}\frac{\eta\mu u}{2^\nu\frac{u}{\nu^2}}=\lim\limits_{u\to 0}\frac{\nu^2\cdot\eta\mu u}{2^\nu u}=\frac{\nu^2}{2^\nu}\lim\limits_{u\to 0}\frac{\eta\mu u}{u}=\frac{\nu^2}{2^\nu}$

Για το $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2020^{f(x)}+2021^{f(x)}}{2020^{f(x)}-2021^{f(x)}}$ θέτουμε $u=f(x)$, $u_0=\lim\limits_{x\to 0}u=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=-\infty$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2020^{f(x)}+2021^{f(x)}}{2020^{f(x)}-2021^{f(x)}}=\lim_{u\to -\infty}\frac{2020^{u}+2021^{u}}{2020^{u}-2021^{u}}=\lim_{u\to -\infty}\frac{1+\left(\frac{2021}{2020}\right)^{u}}{1-\left(\frac{2021}{2020}\right)^{u}}=1$$

Άρα $\frac{v^2}{2^v}=1\Leftrightarrow v^2=2^v\Leftrightarrow v=4$ διότι

Για $x>3$ έχουμε :

$$x^2=2^x\Leftrightarrow \ln x^2=\ln 2^x\Leftrightarrow 2\ln x=x\ln 2\Leftrightarrow f(x)=\frac{\ln 2}{2}\Leftrightarrow f(x)=\frac{2\cdot\ln 2}{4}\Leftrightarrow f(x)=f(4)$$

Στο διάστημα $(3,+\infty)$ η f είναι γνησίως αύξουσα άρα $f(x)=f(4)\Leftrightarrow x=4$

$I=\int_4^5 (x+4)f(x+4)dx$, θέτουμε $u=x+4$ άρα $du=dx$ και για $x=4$ και $x=5$ έχουμε $u=8$ και $u=9$ αντίστοιχα οπότε το ολοκλήρωμα γίνεται

$$I=\int_8^9 uf(u)du=\int_8^9 \ln u du=\left[u\ln u-u\right]_8^9=9\ln 9-9-8\ln 8+8=9\ln 9-8\ln 8-1$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{2h}=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1-h)-f(1)+f(1)}{h}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(1+h)-f(1)}{h}-\frac{f(1-h)-f(1)}{h}\right)=f'(1)$$

Διότι : $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)$

και $\lim_{h\to 0}\frac{f(1-h)-f(1)}{h}=-f'(1)$ αφού αντικαθιστώντας $u=-h$ προκύπτει

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1-h)-f(1)}{h}=\lim_{u\to 0}\frac{f(1+u)-f(1)}{-u}=-\lim_{u\to 0}\frac{f(1+u)-f(1)}{u}=-f'(1)$$

Επίσης θέτουμε $h(x)=\frac{f(x)g(x)-x^2}{x-1}, x\neq 1$ με $\lim_{x\to 1}h(x)=f'(1)$

$(x-1)h(x)+x^2=f(x)g(x)$, ισχύει $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=f(1)=1>0$ κοντά στο 1 άρα

$g(x)=\dfrac{(x-1)h(x)+x^2}{f(x)}$ άρα $\lim\limits_{x\to 1}g(x)=1$ και επειδή η g συνεχής ισχύει $g(1)=1$

Για το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)g(x)-x^2}{x-1}$ έχουμε :

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)g(x)-x^2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\left(\frac{f(x)g(x)-x^2-g(x)+g(x)}{x-1}\right)$$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{g(x)(f(x)-1)}{x-1}+\frac{g(x)-x^2}{x-1}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{g(x)(f(x)-1)}{x-1}+\frac{g(x)-x^2+1-1}{x-1}\right)$$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{g(x)(f(x)-1)}{x-1}+\frac{g(x)-1}{x-1}-\frac{x^2-1}{x-1}\right)=g(1)f'(1)+g'(1)-2=f'(1)+g'(1)-2$$

Άρα $f'(1)=f'(1)+g'(1)-2\Leftrightarrow g'(1)=2$

Β-τρόπος

Το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{g(x)-x^2}{x-1}$ υπολογίζεται και με τον κανόνα del΄hospital

$$\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-x^2}{x-1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to}\left(g'(x)-2x\right)=g'(1)-2$$

(β) Η εξίσωση εφαπτομένης της g στο σημείο $A(1,g(1))$ είναι η $y=2x-1$ και επειδή η g κοίλη ισχύει $g(x)\le 2x-1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει για $x=1$

Δ2.

Η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής στα διαστήματα $[-1,0]$ και $[0,1]$

Άρα υπάρχουν $\xi_1 \in (-1,0)$ και $\xi_2 \in (0,1)$ τέτοια ώστε :

$$f'(\xi_1) = \frac{f(0)-f(-1)}{0-(-1)} \Leftrightarrow f'(\xi_1) = f(0)+1$$

και

$$f'(\xi_2) = \frac{f(1)-f(0)}{1-0} \Leftrightarrow f'(\xi_2) = 1-f(0)$$

Όμως $f'(x) \geq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα

$$f'(\xi_1) \geq 1 \Leftrightarrow f(0)+1 \geq 1 \Leftrightarrow f(0) \geq 0 \quad \text{και} \quad f'(\xi_2) \geq 1 \Leftrightarrow 1-f(0) \geq 1 \Leftrightarrow f(0) \leq 0$$

Άρα $f(0)=0$

Δ3.

Για $x=0$ η εξίσωση αληθεύει , θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = 2x - f(x) - g(x+1) + 1$
με πεδίο ορισμού $A = (-\infty, 0]$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 0)$ με

$h'(x) = -f'(x) + 2 - g'(x+1)$, όμως $h'(x) < 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0)$ διότι :

- Ισχύει $f'(x) \geq 1 \Leftrightarrow -f'(x) \leq -1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα και $-f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0)$
- Ισχύει $g''(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα η g' γνησίως φθίνουσα.

$$x < 0 \Leftrightarrow x+1 < 1 \Leftrightarrow g'(x+1) > g'(1) \Leftrightarrow g'(x+1) > 2 \Leftrightarrow 2 - g'(x+1) < 0$$

Άρα η h γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και $x < 0 \Leftrightarrow h(x) > h(0) \Leftrightarrow h(x) > 0$
Επομένως η εξίσωση έχει στο διάστημα $A = (-\infty, 0]$ μια μόνο λύση την $x = 0$

Δ4. Ισχύει $f'(x)\geq 1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ άρα για $x\in[1,2]$ έχουμε $x\cdot f'(x)\geq x\cdot 1$

$$\int_1^1 x\cdot f'(x)dx \geq \int_1^2 x dx \Rightarrow \left[xf(x)\right]_1^2 - \int_1^2 f(x)dx \geq \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2$$

$$\Rightarrow 2f(2)-f(1)-\int_1^2 f(x)dx \geq \frac{3}{2} \Rightarrow 2\int_1^2 f(x)dx \leq 4f(2)-5$$