



**ΤΑΞΗ:** Γ' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
**ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ:** ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ / ΣΠΟΥΔΩΝ  
ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ  
**ΜΑΘΗΜΑ:** ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

**Ημερομηνία: Κυριακή 24 Μαΐου 2020**  
**Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες**

### ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

#### ΘΕΜΑ Α

**A1.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f(x) = x^\alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, +\infty)$  και ισχύει  $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ , δηλαδή  $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ .

**Μονάδες 8**

**A2.** Να διατυπώσετε το Θεώρημα Rolle και να κάνετε ένα σχήμα που να το ερμηνεύει γεωμετρικά.

**Μονάδες 4**

**A3.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Ισχύει  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 1}{x} = 1$ .

**β)** Έστω μία συνάρτηση  $f$ , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα  $[\alpha, \beta]$ . Αν η  $f$  είναι συνεχής στο  $[\alpha, \beta]$  και  $f(\alpha) \neq f(\beta)$  τότε, για κάθε

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2020  
Β' ΦΑΣΗ

Ε\_3.Μλ3Θ0(ε)

αριθμό  $\eta$  μεταξύ των  $f(\alpha)$  και  $f(\beta)$  υπάρχει ένας τουλάχιστον  $x_0 \in (\alpha, \beta)$  τέτοιος, ώστε,  $f(x_0) = \eta$ .

γ) Έστω οι παραγωγίσιμες στο  $\mathbb{R}$  συναρτήσεις  $f$  και  $g$ . Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει πάντοτε η ισοδυναμία:  $f(x) = g(x) \Leftrightarrow f'(x) = g'(x)$ .

δ) Για κάθε  $x \in \mathbb{R}_1 = \mathbb{R} - \{x \mid \sin x = 0\}$  ισχύει  $(\epsilon\phi x)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$ .

Μονάδες 8

A4. Έστω ο ισχυρισμός:

Υπάρχει συνεχής συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , τέτοια, ώστε  $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^*$ .

Να εξετάσετε αν είναι Αληθής ή Ψευδής.

Μονάδες 2

Να τεκμηριώσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 3

## ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \ln(e^{x-1} - 1)$ .

B1. Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f$  είναι το  $A = (1, +\infty)$  και να βρείτε το σύνολο τιμών της  $f$ .

Μονάδες 6

B2. Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι αντιστρέψιμη και ότι  $f^{-1}(x) = \ln(e^x + 1) + 1$ .

Μονάδες 6

B3. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει  $\rho \in A$  τέτοιος, ώστε  $f^{-1}(\ln(e^{\rho-1} - 1)) = \rho^2 - \rho + 1$ .

Μονάδες 7

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2020  
Β' ΦΑΣΗ

Ε\_3.Μλ3ΘΟ(ε)

- Β4.** Να αποδείξετε ότι για την  $f^{-1}$  ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής στο διάστημα  $[-1,1]$  και στη συνέχεια να βρείτε την τιμή του  $\xi$ , του συμπεράσματος του Θεωρήματος.

Μονάδες 6

## ΘΕΜΑ Γ

Έστω η συνάρτηση  $f(x) = x^2 + 2x - 2x \ln x - 3, x \in (0, +\infty)$ .

- Γ1.** Να βρείτε το πρόσημο της  $f$ .

Μονάδες 5

Να αποδείξετε ότι:

- Γ2. α.**  $f(x) > 2x - 3, x \in (0, +\infty)$ .

Μονάδες 5

- β.** Η εξίσωση  $f(x) = 2020$  έχει μοναδική λύση.

Μονάδες 3

- Γ3.** Από το σημείο  $A(0, -2)$  μπορούμε να φέρουμε προς τη γραφική παράσταση της  $f$ , ακριβώς μια εφαπτομένη, την οποία και να βρείτε.

Μονάδες 5

- Γ4.** Υπάρχουν ακριβώς δύο παραγωγίσιμες στο  $(0, +\infty)$  συναρτήσεις  $F$ , ώστε  $F^2(x) = f^2(x)$ .

Μονάδες 7

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2020  
Β' ΦΑΣΗ

E\_3.Μλ3Θ0(ε)

## ΘΕΜΑ Δ

Έστω η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ , για την οποία ισχύει:

$$f''(x) - f(x) = 2e^x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, \text{ με } f(0) = -1, f'(0) = 2.$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι  $f(x) = xe^x - e^{-x}, x \in \mathbb{R}$ .

Μονάδες 7

Δ2. Να αποδείξετε ότι η  $f$  έχει μία μόνο ρίζα.

Μονάδες 6

Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση  $g(x) = (x-1)e^x + e^{-x}, x \in \mathbb{R}$ .

Δ3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $g$  εκτός της προφανούς ρίζας 0, έχει μόνο μία ακόμη ρίζα.

Μονάδες 6

Δ4. Ένα υλικό σημείο  $M$  ξεκινά τη χρονική στιγμή  $t=0$  sec, από το σημείο  $A(-2, g(-2))$  και κινείται κατά μήκος της καμπύλης  $y = g(x)$ , με  $x = x(t)$  και  $y = y(t), t \geq 0$  sec. Ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του είναι  $x'(t) = 2$  μονάδες μήκους ανά sec. Να βρείτε τη χρονική στιγμή στην οποία ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του είναι  $y'(t) = -2$  μονάδες μήκους ανά sec.

Μονάδες 6