



ΤΑΞΗ: Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ / ΣΠΟΥΔΩΝ
ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ημερομηνία: Τρίτη 7 Ιανουαρίου 2020
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. α) Να αποδείξετε ότι: αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 5

β) Με τη βοήθεια της συνάρτησης $f(x) = |x|$, να αποδείξετε ότι δεν ισχύει το αντίστροφο της παραπάνω πρότασης.

Μονάδες 3

A2. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της ;

Μονάδες 3

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

Στα ερωτήματα γ, ε να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

α) Αν μία συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη, τότε είναι συνάρτηση "1–1".

Μονάδες 2

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2020
Α΄ ΦΑΣΗ

E_3.Μλ3ΘΟ(ε)

β) $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = +\infty.$

Μονάδες 2

γ) $|\eta\mu x| < x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 4

δ) Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$, τότε η f παίρνει στο $[\alpha, \beta]$ μία μέγιστη τιμή M και μία ελάχιστη m .

Μονάδες 2

ε) Αν για τη συνάρτηση f ισχύει το Θεώρημα Bolzano στο $[\alpha, \beta]$, τότε ισχύει και το Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών στο $[\alpha, \beta]$.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Β

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} e^x, & x \geq 0 \\ ax + \beta, & x < 0 \end{cases}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και η συνάρτηση $g(x) = \ln x, x > 0$. Να αποδείξετε ότι:

B1. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x} = \frac{de^x}{dx} \Big|_{x=0} = 1.$

Μονάδες 5

B2. $f(x) = \begin{cases} e^x, & x \geq 0 \\ x + 1, & x < 0 \end{cases}$ και με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της f να βρείτε τη μονοτονία της.

Μονάδες 9

B3. $h(x) = (f \circ g)(x) = \begin{cases} x, x \geq 1 \\ \ln x + 1, 0 < x < 1 \end{cases}$

Μονάδες 6

B4. Η h αντιστρέφεται και να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $|h^{-1}|$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^{2x} + x - 1, x \in \mathbb{R}$.

Γ1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το πρόσημό της.

Μονάδες 6

Γ2. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3f(x) - 5}{2f(x)}$.

Μονάδες 5

Γ3. α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f^{-1} ορίζεται και μάλιστα στο \mathbb{R} .

β) Να αποδείξετε ότι η $h(x) = \left(e^{f^{-1}(x)}\right)^2 + f^{-1}(x) - x$ είναι σταθερή στο \mathbb{R} .

Μονάδες 8

Γ4. Να εξετάσετε αν η ευθεία $(\varepsilon): y = 3f^{-1}(e^2)x$, εφάπτεται της C_f .

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Έστω συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι τέτοια ώστε:

$$f\left(\frac{x}{e}\right) + 1 - \frac{x}{e} \leq \ln x \leq f(x) - x, \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty).$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι: $f(x) = \ln x + x, x \in (0, +\infty)$.

Μονάδες 6

Δ2. Να λύσετε την ανίσωση: $x \ln x < 1 - x$ και να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0^+} (f(\eta\mu x) - f(x))$.

Μονάδες 8

Δ3. Να αποδείξετε ότι η f έχει ακριβώς μία ρίζα, έστω $x_0 \in (0, 1)$ και να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x) = f(f(x)) - 2(x - 1)$.

Μονάδες 6

Δ4. Να αποδείξετε ότι οι C_f, C_g έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο με τετμημένη 1.

Μονάδες 5