

ΤΑΞΗ: 3<sup>η</sup> ΤΑΞΗ ΕΠΑ.Λ.

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ / ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Ημερομηνία: Τρίτη 7 Ιανουαρίου 2020

Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

## ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

## ΘΕΜΑ Α

A1. Αν η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σε ένα σύνολο  $A$  και  $c$  είναι μια πραγματική σταθερά, τότε να αποδείξετε ότι για κάθε  $x \in A$  ισχύει ότι:  
 $(cf(x))' = cf'(x)$

Μονάδες 6

A2. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού  $A$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 3

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιο σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **Λάθος**, αν είναι λανθασμένη.

i. Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lambda$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  με  $\lambda > 0$  τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[\lambda]{f(x)} = \sqrt[\lambda]{\lambda}$

ii. Για όλες τις συναρτήσεις  $f, g$  που είναι παραγωγίσιμες στο  $\mathbb{R}$  ισχύει :  
 $(fg)'(x) = f'(x)g'(x)$

iii. Αν μια συνάρτηση  $f(x)$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(\alpha, \beta)$  και  $f'(x) < 0$  για κάθε  $x \in (\alpha, \beta)$ , τότε η  $f(x)$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $(\alpha, \beta)$ .

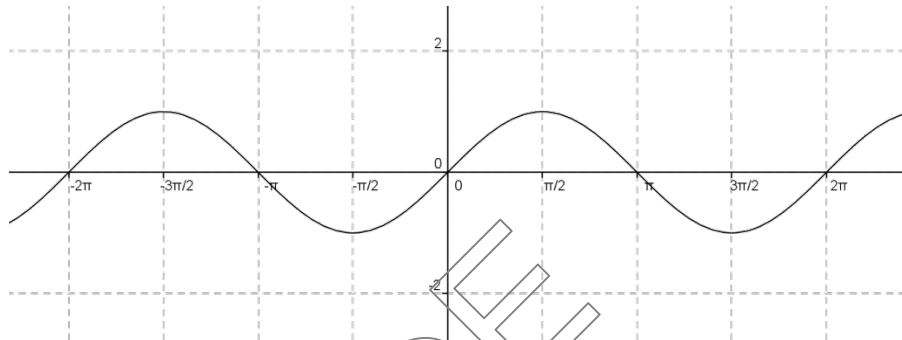
iv. Αν για μια παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f$  ισχύει:  $f'(x_0) = 0$ , με  $x_0 \in A_f$ , τότε αυτή έχει πάντοτε ακρότατο στο  $x_0$ .

v. Αν η ταχύτητα ενός κινητού είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση, τότε ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας είναι η επιτάχυνση.

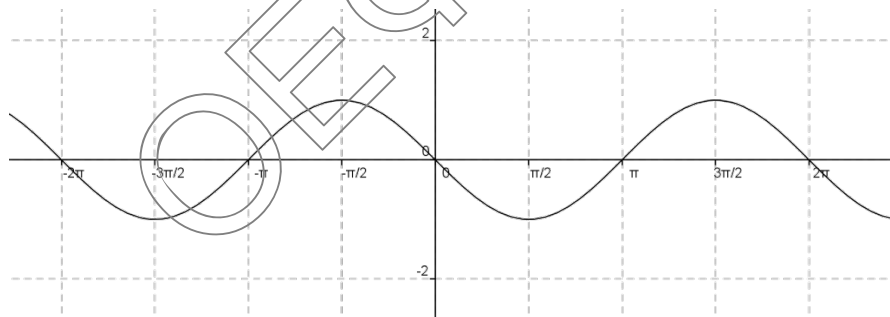
Μονάδες 10

- A4. Δίνεται η συνάρτηση  $g(x) = \sin x$  με  $x \in \mathbb{R}$ . Ποια από τις δύο εικόνες που ακολουθούν αντιστοιχεί στο γράφημα της  $g'(x)$ ;

**Εικόνα 1**



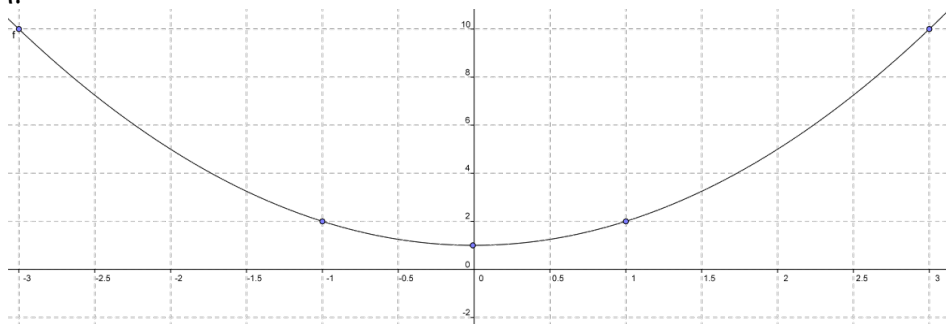
**Εικόνα 2**



Δώστε την ορθή απάντηση στο γραπτό σας γράφοντας εικόνα 1 ή 2 ανάλογα με την επιλογή σας.

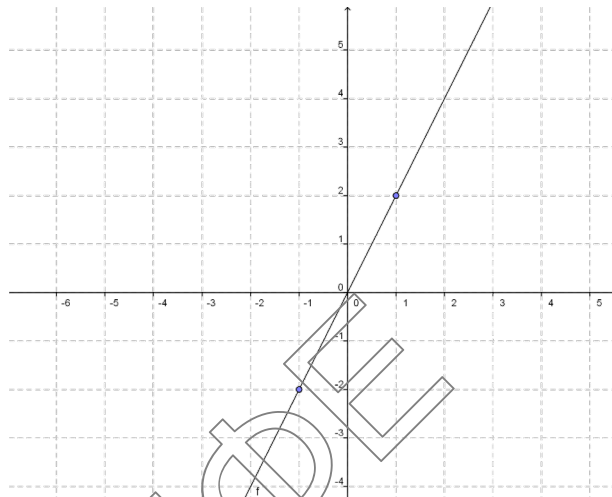
**Μονάδες 3**

- A5. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f(x)$  με πεδίο ορισμού  $\mathbb{R}$ , της οποίας το γράφημα ακολουθεί:

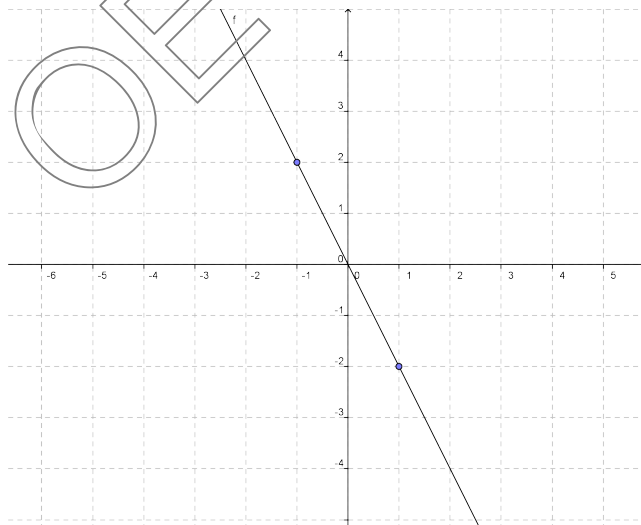


Ποια από τις δύο εικόνες που ακολουθούν αντιστοιχεί στο γράφημα της  $f'(x)$ ;

Εικόνα 1

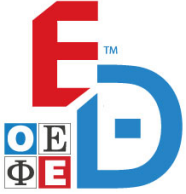


Εικόνα 2



Δώστε την ορθή απάντηση στο γραπτό σας γράφοντας εικόνα 1 ή 2 ανάλογα με την επιλογή σας.

**Μονάδες 3**

**ΘΕΜΑ Β**

**B1.** Δίνεται η συνάρτηση  $g(x) = \frac{\eta\mu x}{\eta\mu x + 2}$  με  $x \in \mathbb{R}$

i. Βρείτε το πεδίο ορισμού της  $g(x)$ .

**Μονάδες 5**

ii. Βρείτε την παράγωγο της  $g(x)$ .

**Μονάδες 5**

**B2.** Αν  $f(x) = -x^3 - x + 2, x \geq 1$

i. Να δείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $[1, +\infty)$

**Μονάδες 5**

ii. Βρείτε την εφαπτόμενη της  $f$  η οποία είναι παράλληλη στην ευθεία  $y = -13x + 3$

**Μονάδες 5**

iii. Υπολογίστε το εμβαδόν που περικλείεται από την ευθεία  $y = -13x + 18$  με  $x \in \mathbb{R}$  και τους άξονες  $x'$  και  $y'$ .

**Μονάδες 5**

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται δευτέρου βαθμού πολυώνυμο  $P(x)$  για το οποίο ισχύει:

$$P(x) + \frac{1}{2}P''(x) = (\eta\mu^2x + \sigma\upsilon\nu^2x)^{2019}x^2 + 2\eta\mu\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}$$

Γ1. Να δείξετε ότι  $P(x) = x^2 + 1$

**Μονάδες 7**

Γ2. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων της γραφικής παράστασης της  $P(x)$  που διέρχονται από την αρχή των αξόνων.

**Μονάδες 6**

Γ3. Σχεδιάστε την  $P(x) = x^2 + 1$  και την εφαπτομένη της ( $\epsilon$ ):  $y = 2x$  για  $x \geq 0$ , καθώς και την προβολή ενός τυχαίου σημείου  $A$  της εφαπτομένης στον άξονα  $x'x$ .

**Μονάδες 5**

Γ4. Να δείξετε ότι η ο ρυθμός μεταβολής της περιμέτρου του τριγώνου που σχηματίζουν το τυχαίο σημείο  $A$  της εφαπτομένης ( $\epsilon$ ), η προβολή του  $B$  στον  $x'x$  και η αρχή των αξόνων  $O$ , είναι σταθερός.

**Μονάδες 7**

## ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Να βρεθεί η εξίσωση ευθείας που διέρχεται από το σημείο  $A(1,2)$  και σχηματίζει με τους θετικούς ημιάξονες  $Ox$  και  $Oy$  τρίγωνο με ελάχιστο εμβαδόν.

Μονάδες 9

Δ2. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{-2x^2+2x+4}{x+1}$

i. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της  $f(x)$

Μονάδες 2

ii. Να δείξετε ότι γραφική παράσταση της συνάρτησης

$f(x) = \frac{-2x^2+2x+4}{x+1}$  είναι η ζητούμενη ευθεία στο ερώτημα (Δ1) εκτός του σημείου  $B(-1,6)$ .

Μονάδες 4

Δ3. Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $f(x)$  είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 3

Δ4.

i. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $g(x) = \sqrt{f(x)}$

Μονάδες 3

ii. να βρεθεί το όριο  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(x)+x}{g(x)}$ .

Μονάδες 4