ΤΑΞΗ: **3η ΤΑΞΗ ΕΠΑ.Λ.**

ΜΑΘΗΜΑ: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ / ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ**

Ημερομηνία: Τρίτη 7 Ιανουαρίου 2020
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΟΕΦΕ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 30

Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 22

Α3. Σ,Λ,Σ,Λ,Σ

Α4. (2) Α5. (1)

ΘΕΜΑ Β

Β1.

i. Για κάθε x∈R ισχύει:

-1≤ημx≤1⟹-1+2≤ημx+2≤1+2⟹1≤ημx≤3⟹ημx≠0. Επομένως D_f=R.

ii. $g'(x) = \frac{(\eta\mu x)'(\eta\mu x+2)-(\eta\mu x)(\eta\mu x+2)'}{(\eta\mu x+2)^2} = \frac{\sigma\upsilon\nu x(\eta\mu x+2)-\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}{(\eta\mu x+2)^2} = \frac{2\sigma\upsilon\nu x}{(\eta\mu x+2)^2}$

Β2.

i. Έχω $f'(x) = -3x^2 - 1 < 0$ *και f παραγωγίσιμη* άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο [1,+∞)

ii. $f'(x_o) = -13 \Longrightarrow -3{x_o}^2 - 1 = -13 \Longrightarrow {x_o}^2 = 4 \Longrightarrow x_o = 2$ ή $x_o = -2$

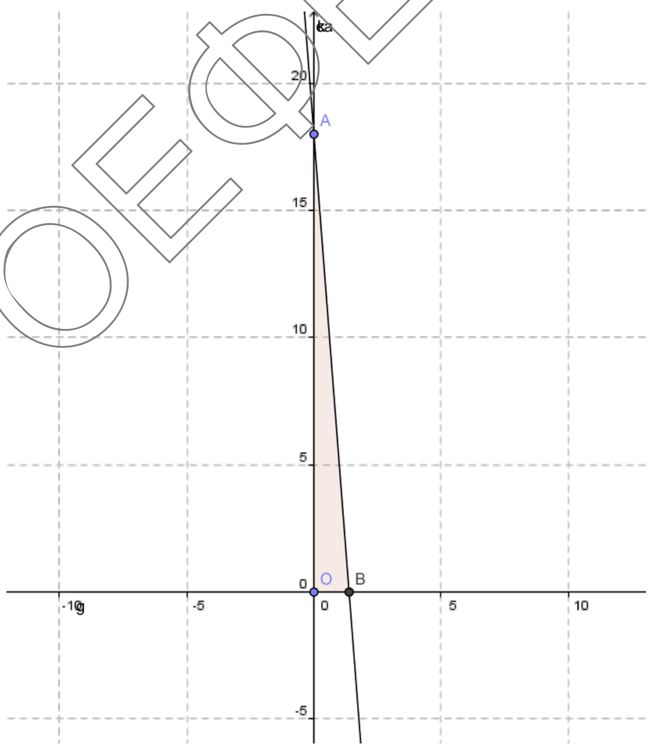
Απορρίπτεται διότι το -2 δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της f. Επομένως η εξίσωση εφαπτομένης είναι:

$y = f'(2)x + b$,το σημείο Κ(2,f(2))=(2,-8) ανήκει στην εφαπτομένη άρα την επαληθεύει :$-8 = 13 \cdot 2 + \beta$ =>β=18 επομένως η εξίσωση είναι: $y = -13x + 18$

iii. Τομή με $y'y$ $(\chi = 0)$: $y = -13 * 0 + 18 = 18$ άρα έχω το σημείο $A(0{,}18)$

Τομή με $x'x$ $(y = 0)$: $0 = -13x + 18 \Longrightarrow x = \frac{18}{13}$ άρα έχω το σημείο $B(\frac{18}{13}, 0)$

Θεωρούμε για τις ανάγκες σχεδίασης ως $k(x) = -13x + 18$



Επομένως $(AOB) = \frac{(A0)(OB)}{2} = \frac{1}{2} 18 \frac{18}{13} = 9 \frac{18}{13} = \frac{162}{13}$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Γνωρίζουμε ότι:

- $(\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x)^{2019} = 1^{2019} = 1$
- $2\eta\mu\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} = 2 + 0 = 2$

Επομένως: $P(x) + \frac{1}{2}P''(x) = x^2 + 2$ σχέση (1)

Έχουμε $\begin{cases} P(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \\ P'(x) = 2\alpha x \\ P''(x) = 2\alpha \end{cases}$ $\varepsilon\pi o\mu\acute{\varepsilon}\nu\omega\varsigma\ \eta\ (1)\ \gamma\acute{\iota}\nu\varepsilon\tau\alpha\iota$:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma + \frac{1}{2}2\alpha = x^2 + 2 \Rightarrow \alpha x^2 + \beta x + \gamma + \alpha = x^2 + 0x + 2$$

Ως εκ τούτου έχουμε: $\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 0 \\ \gamma + \alpha = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 1 \end{cases}$

Συνεπώς: $\begin{cases} P(x) = x^2 + 1 \\ P'(x) = 2x \\ P''(x) = 2 \end{cases}$

Γ2. Έστω $M(x_o, P(x_o))$ σημείο επαφής της P(x) και μιας εφαπτομένης.

Εξίσωση εφαπτομένης (ε): $y = P'(x_o)x + \beta \Rightarrow y = 2x_o x + \beta$ σχέση (2)

Αφού οι εφαπτόμενες διέρχονται από την αρχή των αξόνων, η σχέση (2) για x=y=0 γίνεται: $0 = 2x_o 0 + \beta \Rightarrow \beta = 0$ άρα τελικά η εξίσωση της εφαπτομένης για β=0 γίνεται: $y = 2x_o x$ σχέση (3)

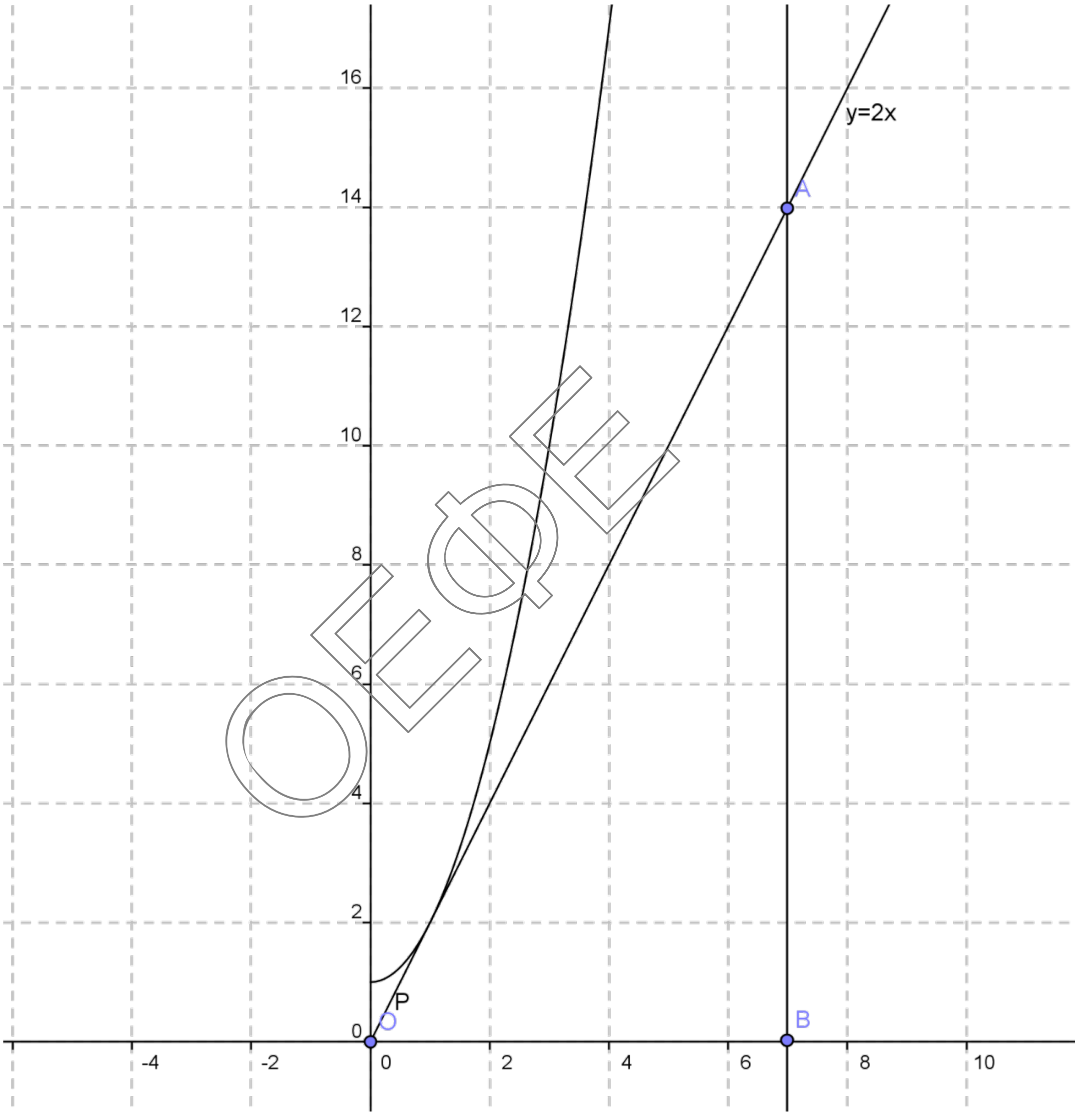
Επιπλέον, το σημείο επαφής θα ανήκει και στην (ε) και στην P(x), άρα θα επαληθεύει και τις δύο. Ως εκ τούτου η (3) γίνεται

$P(x_0) = 2x_o x_o \Rightarrow x_o^2 + 1 = 2x_o^2 \Rightarrow x_o^2 = 1 \Rightarrow x_o = 1$ ή -1

Για $x_o = 1$ η (3) $\gamma\acute{\iota}\nu\varepsilon\tau\alpha\iota\ y = 2x$

Για $x_o = -1\ \eta\ (3)\ \gamma\acute{\iota}\nu\varepsilon\tau\alpha\iota\ y = -2x$

Γ3. Έστω Α(x,2x) τυχαίο σημείο της (ε) και Β(x,0) η προβολή του στον άξονα x΄x



Γ4. Το τρίγωνο ΑΒΟ είναι ορθογώνιο, επομένως θα εφαρμόσω το πυθαγόρειο θεώρημα για την εύρεση της πλευράς ΑΟ.

Έχουμε $BO = x, AB = 2x, επομένως$

$$AO^2 = BO^2 + AB^2 \Longrightarrow AO = \sqrt{x^2 + (2x)^2} = \sqrt{5x^2} = \sqrt{5}x$$

Άρα η περίμετρος: $\Pi(x) = BO + AB + AO = x + 2x + \sqrt{5}x = \left(3 + \sqrt{5}\right)x$

Επομένως ο ρυθμός μεταβολής της περιμέτρου είναι: $\Pi'(x) = 3 + \sqrt{5}$ που είναι σταθερός αριθμός.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η ζητούμενη ευθεία έχει εξίσωση της μορφής (ε): y=λx+β, λ<0. Η ευθεία (ε) διέρχεται από το σημείο Α(1,2), άρα 2=λ+β$\Longrightarrow \beta = 2-\lambda$

Συνεπώς η ευθεία (ε) έχει εξίσωση (ε): y=λx+2-λ, με λ<0. Η ευθεία τέμνει τους άξονες Oy και Ox στα σημεία Κ(0,2-λ) και Λ($\frac{\lambda-2}{\lambda}$, 0) αντίστοιχα.

Το εμβαδόν του τριγώνου ΚΛΟ που σχηματίζει η ευθεία (ε) με τους θετικούς ημιάξονες δίνεται από τη σχέση : Ε(λ)=$\frac{1}{2}\frac{\lambda-2}{\lambda}(2-\lambda)$, με λ<0.

Ε(λ)=$\frac{-(\lambda-2)^2}{2\lambda}$, λ<0 γίνεται ελάχιστο όταν λ=-2, καθώς $E'(\lambda)=\frac{4-\lambda^2}{2\lambda^2}$ και

Ε΄(λ) =0$\Longrightarrow 4-\lambda^2=0$ άρα λ=2 ή λ=-2 (Το λ=2 απορρίπτεται διότι λ<0)

λ	$-\infty$	-2	2
$E'(\lambda)$	-	+	-
Ε(λ)	↓	↑	↓

Για λ=-2 η ζητούμενη ευθεία είναι y=-2x+4

Δ2. Έχουμε f(x)=$\frac{-2x^2+2x+4}{x+1}$

i. Πρέπει x+1 $\neq 0 \Leftrightarrow$ x$\neq$ 1 άρα D=$(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$

ii. Έχουμε $f(x)=\frac{-2x^2+2x+4}{x+1}=\frac{-2(x^2-x-2)}{x+1}=\frac{-2(x+1)(x-2)}{x+1}=-2x+4$.
Επομένως η γραφική παράσταση της f είναι η ευθεία y=-2x+4 εκτός του σημείου Β(-1,6).

Δ3. Έχουμε f(x)=-2x+4 άρα f΄(x)=-2<0 για κάθε xϵ D=$(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$.

Επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο (-∞,-1) και στο (-1,+∞).

Δ4.

i. Έχουμε g(x)=$\sqrt{f(x)}$ επομένως πρέπει

$$\begin{cases} -2x+4 \geq 0 \quad \kappa\alpha\iota \\ x \neq -1 \ \text{ διότι } \ D=(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x \neq -1 \end{cases}$$

Διότι: $-2x+4 \geq 0 \Leftrightarrow -2\chi \geq -4 \Leftrightarrow \chi \leq 2$ Αρα έχουμε Α=$(-\infty,-1)\cup(-1,2]$

ii. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f'(x)+x}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 2}\frac{-2+x}{\sqrt{-2x+4}} = \lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)\sqrt{-2x+4}}{\sqrt{-2x+4}^2} = \lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)\sqrt{-2x+4}}{-2x+4} =$
$\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)\sqrt{-2x+4}}{-2(x-2)} = \lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{-2x+4}}{-2} = 0$

ΟΕΦΕ