ΤΑΞΗ: Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ημερομηνία: Κυριακή 24 Μαΐου 2020
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ. 81

Α2. Σχολικό βιβλίο σελ. 41

Α3.

α. Σωστό
β. Λάθος
γ. Σωστό
δ. Λάθος
ε. Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η εξίσωση της πλευράς ΑΒ είναι: $y - y_{\mathrm{B}} = \frac{y_{\mathrm{A}} - y_{\mathrm{B}}}{x_{\mathrm{A}} - x_{\mathrm{B}}}(x - x_{\mathrm{B}}) \Rightarrow$

$$y - 6 = \frac{6-2}{4-(-3)}(x-4) \Leftrightarrow y - 6 = \frac{4}{7}(x-4) \Leftrightarrow 7y - 42 = 4x - 16 \Leftrightarrow 4x - 7y + 26 = 0.$$

Β2. Θα βρούμε το μέσο Κ του ΑΓ που είναι: $(x_{\mathrm{K}}, y_{\mathrm{K}}) = \left(\frac{x_{\mathrm{A}} + x_{\Gamma}}{2}, \frac{y_{\mathrm{A}} + y_{\mathrm{B}}}{2}\right) \Rightarrow$

$$(x_{\mathrm{K}}, y_{\mathrm{K}}) = \left(\frac{-3+8}{2}, \frac{2+(-1)}{2}\right) \Leftrightarrow (x_{\mathrm{K}}, y_{\mathrm{K}}) = \left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \mathrm{K}\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

το Κ θα είναι και μέσο του ΒΔ οπότε: $(x_{\mathrm{K}}, y_{\mathrm{K}}) = \left(\frac{x_{\mathrm{B}} + x_{\Delta}}{2}, \frac{y_{\mathrm{B}} + y_{\Delta}}{2}\right)$. Άρα παίρνουμε τις σχέσεις

$x_K = \frac{x_B + x_\Delta}{2} \Rightarrow \frac{5}{2} = \frac{4 + x_\Delta}{2} \Leftrightarrow 4 + x_\Delta = 5 \Leftrightarrow x_\Delta = 1$ και

$y_K = \frac{y_B + y_\Delta}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{6 + y_\Delta}{2} \Leftrightarrow 6 + y_\Delta = 1 \Leftrightarrow y_\Delta = -5$

Άρα Δ(1,-5).

Β3. Μ μέσο της ΒΓ άρα $(x_M, y_M) = \left(\frac{x_B + x_\Gamma}{2}, \frac{y_B + y_B}{2}\right) = \left(\frac{4+8}{2}, \frac{6+(-1)}{2}\right) = \left(6, \frac{5}{2}\right)$

Δηλαδή $M\left(6, \frac{5}{2}\right)$, οπότε το εμβαδόν του τριγώνου δίνεται από την σχέση

$\left(A\overset{\Delta}{M}B\right) = \frac{1}{2}\left|\det\left(\vec{AM}, \vec{AB}\right)\right|$ (1)

$\vec{AM} = (x_M - x_A, y_M - y_A) = \left(6 - (-3), \frac{5}{2} - 2\right) = \left(9, \frac{1}{2}\right)$

$\vec{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A) = (4 - (-3), 6 - 2) = (7, 4)$

$\det\left(\vec{AM}, \vec{AB}\right) = \begin{vmatrix} 9 & \frac{1}{2} \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = 9 \cdot 4 - 7 \cdot \frac{1}{2} = 36 - \frac{7}{2} = \frac{65}{2}$. Άρα από την (1)

έχουμε $\left(A\overset{\Delta}{M}B\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{65}{2} = \frac{65}{4}$

Β4. Θα βρούμε την κλίση της ευθείας ΑΜ που είναι: $\lambda_{AM} = \frac{y_A - y_M}{x_A - x_M} = \frac{2 - \frac{5}{2}}{-3 - 6} \Leftrightarrow$

$\lambda_{AM} = \frac{-\frac{1}{2}}{-9} = \frac{1}{18}$. Επειδή η ευθεία που ζητάει είναι κάθετη στην ΑΜ θα ισχύει:

$\lambda_{AM} \cdot \lambda_\varepsilon = -1$, όπου (ε) η ευθεία που ζητάει. Άρα $\frac{1}{18} \cdot \lambda_\varepsilon = -1 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = -18$.

Η ευθεία που ζητάει θα είναι: $y - y_\Delta = \lambda_\varepsilon (x - x_\Delta) \Rightarrow y - (-5) = -18(x - 1) \Leftrightarrow$

$y + 5 = -18x + 18 \Leftrightarrow 18x + y = 13$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έχουμε ότι: $y^2+x^2-2xy+y-x-2=0 \Leftrightarrow y^2+(1-2x)y+x^2-x-2=0$

Υπολογίζουμε την διακρίνουσα του παραπάνω τριωνύμου:

$\Delta=(1\text{-}2x)^2-4(x^2-x-2)=1-4x+4x^2-4x^2+4x+8=9$

Άρα οι λύσεις του τριωνύμου δίνονται από τις σχέσεις:

$$y=\frac{2x-1+\sqrt{9}}{2} \Leftrightarrow y=\frac{2x-1+3}{2} \Leftrightarrow y=\frac{2x+2}{2} \Leftrightarrow y=x+1\,(1)\text{και}$$

$$y=\frac{2x-1-\sqrt{9}}{2} \Leftrightarrow y=\frac{2x-1-3}{2} \Leftrightarrow y=\frac{2x-4}{2} \Leftrightarrow y=x-2\,(2)$$

Οι (1) και (2) παριστάνουν δύο ευθείες τις $(\varepsilon_1): y=x+1$ και $(\varepsilon_2): y=x-2$ που είναι μεταξύ τους παράλληλες καθώς έχουν ίσες κλίσεις.

Γ2. Έστω Μ(x,y) σημείο της μεσοπαραλλήλου των (ε_1) και (ε_2).

Τότε ισχύει $d(\mathrm{M},\varepsilon_1)=d(\mathrm{M},\varepsilon_2)$

$$\Leftrightarrow \frac{|x-y+1|}{\sqrt{1+1}}=\frac{|x-y-2|}{\sqrt{1+1}} \Leftrightarrow |x-y+1|=|x-y-2| \Leftrightarrow x-y+1=x-y-2$$

ή $x-y+1=-(x-y-2)$ οπότε έχουμε ότι η πρώτη σχέση είναι αδύνατη ενώ από τη δεύτερη σχέση προκύπτει η ζητούμενη ευθεία με εξίσωση $(\varepsilon): 2x-2y-1=0 \Leftrightarrow (\varepsilon): y=x\text{-}\frac{1}{2}$

Γ3. Παίρνουμε ένα σημείο Κ της ευθείας (ε_1)

Για x=0 έχουμε y=1.Αρα K(0,1).

Η απόσταση των (ε_1) και (ε_2) είναι:

$$d(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=d(K,\varepsilon_2)=\frac{|0-1-2|}{\sqrt{1+1}}=\frac{|-3|}{\sqrt{2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Γ4. Έστω μία ευθεία (η) παράλληλη στην ευθεία (ε_1). Αυτή θα είναι της μορφής $(\eta): y=x+\alpha$

Η ευθεία τέμνει τους άξονες στα σημεία:

- Για $x=0 \Rightarrow \mathrm{y}=\alpha$. Άρα $\mathrm{A}(0,\alpha)$
- Για $y=0 \Rightarrow \mathrm{x}=-\alpha$. Άρα $\mathrm{B}(\text{-}\alpha,0)$

Έχουμε ότι το εμβαδό του τριγώνου ΟΑΒ είναι:

$$(\mathrm{OAB})=\frac{1}{2}(\mathrm{OA})\cdot(\mathrm{OB})\Leftrightarrow 8=\frac{1}{2}|\alpha|\cdot|-\alpha|\Leftrightarrow \alpha^2=16\Leftrightarrow \alpha=\pm 4$$

Επομένως $(\eta_1): y=x+4$ και $(\eta_2): y=x-4$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $(2\vec{\alpha}-3\vec{\beta})\perp(2\vec{\alpha}-\vec{\beta})\Leftrightarrow(2\vec{\alpha}-3\vec{\beta})(2\vec{\alpha}-\vec{\beta})=0\Leftrightarrow 4\vec{\alpha}^2-2\vec{\alpha}\vec{\beta}-6\vec{\beta}\vec{\alpha}+3\vec{\beta}^2=0\Leftrightarrow$
$4|\vec{\alpha}|^2-8\vec{\alpha}\vec{\beta}+3|\vec{\beta}|^2=0$, επειδή $|\vec{\alpha}|=1$ έχουμε ότι $-8\vec{\alpha}\vec{\beta}+3|\vec{\beta}|^2=-4\,(1)$

$|\vec{\alpha}-2\vec{\beta}|=3\Leftrightarrow|\vec{\alpha}-2\vec{\beta}|^2=3^2\Leftrightarrow(\vec{\alpha}-2\vec{\beta})^2=9\Leftrightarrow\vec{\alpha}^2-4\vec{\alpha}\vec{\beta}+4\vec{\beta}^2=9\Leftrightarrow$
$|\vec{\alpha}|^2-4\vec{\alpha}\vec{\beta}+4|\vec{\beta}|^2=9$, επειδή $|\vec{\alpha}|=1$ έχουμε ότι $-4\vec{\alpha}\vec{\beta}+4|\vec{\beta}|^2=8\,(2)$

Λύνοντας σύστημα τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$$\left.\begin{aligned}-8\vec{\alpha}\vec{\beta}+3|\vec{\beta}|^2&=-4\\-4\vec{\alpha}\vec{\beta}+4|\vec{\beta}|^2&=8\end{aligned}\right\}\underset{\cdot 2}{\overset{\cdot(-1)}{\Leftrightarrow}}\left.\begin{aligned}8\vec{\alpha}\vec{\beta}-3|\vec{\beta}|^2&=4\\-8\vec{\alpha}\vec{\beta}+8|\vec{\beta}|^2&=16\end{aligned}\right\}\overset{+}{\Leftrightarrow}5|\vec{\beta}|^2=20\Leftrightarrow|\vec{\beta}|^2=4\Leftrightarrow|\vec{\beta}|=\pm 2$$

Επειδή το μέτρο είναι πάντα θετικός αριθμός το $|\vec{\beta}|=2$

Από (1) έχουμε: $-8\vec{\alpha}\vec{\beta}+3|\vec{\beta}|^2=-4\Leftrightarrow-8\vec{\alpha}\vec{\beta}+3\cdot 2^2=-4\Leftrightarrow\vec{\alpha}\vec{\beta}=2$

Δ2. Για $|\vec{\beta}|=2$ και $\vec{\alpha}\vec{\beta}=2$, οι εξισώσεις των ευθειών γίνονται:
$(\varepsilon_1):(\lambda+1)x+(\lambda-4)y+\lambda(\lambda-3)+2=0$ και $(\varepsilon_2):(\lambda+2)x+3\lambda y+\lambda-4=0$
Η εξίσωση (ε_1) δεν παριστάνει ευθεία όταν ισχύει

$$\left.\begin{aligned}\lambda+1&=0\\ \text{και}&\\ \lambda-4&=0\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{aligned}\lambda&=-1\\ \text{και}&\\ \lambda&=4\end{aligned}\right\}$$ άτοπο γιατί η παράμετρος λ δεν μπορεί να λαμβάνει

ταυτόχρονα δύο διαφορετικές τιμές. Άρα η εξίσωση (ε_1) παριστάνει ευθεία για κάθε τιμή της $\lambda\in\Re$.
Ομοίως η εξίσωση (ε_2) δεν παριστάνει ευθεία όταν ισχύει

$$\left.\begin{aligned}\lambda+2&=0\\ \text{και}&\\ 3\lambda&=0\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{aligned}\lambda&=-2\\ \text{και}&\\ \lambda&=0\end{aligned}\right\}$$ άτοπο γιατί η παράμετρος λ δεν μπορεί να λαμβάνει

ταυτόχρονα δύο διαφορετικές τιμές. Άρα η εξίσωση (ε_2) παριστάνει ευθεία για κάθε τιμή της $\lambda\in\Re$.

Έστω ένα διάνυσμα $\vec{u} // (\varepsilon_1) : \vec{u} = (\lambda - 4, -\lambda - 1)$ και έστω ένα διάνυσμα $\vec{v} // (\varepsilon_2) : \vec{v} = (3\lambda, -\lambda - 2)$. Τότε για να είναι $(\varepsilon_1) \perp (\varepsilon_2)$ θα πρέπει $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow$ $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 4, -\lambda - 1) \cdot (3\lambda, -\lambda - 2) = 0 \Leftrightarrow 3\lambda(\lambda - 4) + (-\lambda - 1)(-\lambda - 2) = 0 \Leftrightarrow$ $4\lambda^2 - 9\lambda + 2 = 0$ με ρίζες $\lambda = 2$ ή $\lambda = \frac{1}{4}$.

Δ3. $(\varepsilon_2) : (\lambda + 2)x + 3\lambda y + \lambda - 4 = 0$

Για $\lambda = 1$ η (ε_2) γίνεται: $3x + 3y - 3 = 0$

Για $\lambda = 2$ η (ε_2) γίνεται: $2x + 3y - 1 = 0$, οπότε λύνουμε σύστημα να βρούμε το σημείο Α που τέμνονται οι δύο ευθείες αυτές.

$$\left.\begin{matrix} 3x + 3y - 3 = 0 \\ 2x + 3y - 1 = 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} 3x + 3y = 3 \\ 2x + 3y = 1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} x + y = 1 \\ -2x - 3y = -1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} 2x + 2y = 2 \\ -2x - 3y = -1 \end{matrix}\right\} \overset{+}{\Leftrightarrow} -y = 1$$

Άρα $y = -1$, και από την $x + y = 1$ βγάζουμε $x + (-1) = 1 \Leftrightarrow x = 2$, $A(2,-1)$

Θα δείξουμε ότι το σημείο $A(2,-1)$ ανήκει για κάθε τιμή του λ στην ευθεία $(\varepsilon_2) : (\lambda + 2)x + 3\lambda y + \lambda - 4 = 0$, βάζοντας όπου $x = 2$ και $y = -1$.

$(\lambda + 2) \cdot 2 + 3\lambda \cdot (-1) + \lambda - 4 = 0 \Leftrightarrow 2\lambda + 4 - 3\lambda + \lambda - 4 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$ που ισχύει.

Δ4. Ο κύκλος θα είναι της μορφής $x^2 + y^2 = \rho^2$ (1).

Η $(\varepsilon_2) : (\lambda + 2)x + 3\lambda y + \lambda - 4 = 0$ για $\lambda = 1$ γίνεται $3x + 3y - 3 = 0 \Leftrightarrow x + y = 1$ (ε)

$$d(O, \varepsilon) = \rho \Leftrightarrow \frac{|0 + 0 - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \rho \Leftrightarrow \frac{|-1|}{\sqrt{2}} = \rho \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \rho \Leftrightarrow \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \rho \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \rho$$

Από την (1) έχουμε: $x^2 + y^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = \frac{2}{4} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$.