ΤΑΞΗ: **Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: **ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ**
ΜΑΘΗΜΑ: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

Ημερομηνία: Τρίτη 7 Ιανουαρίου 2020
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 33 παράγραφος 1.4

Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 21 παράγραφος 1.3

Α3.

- **i.** Λάθος
- **ii.** Σωστό
- **iii.** Σωστό
- **iv.** Σωστό
- **v.** Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=2\cdot1\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}=2\cdot1\cdot\frac{1}{2}=1$

Β2. Είναι $3\lambda\vec{\beta}\neq\vec{0}\overset{\vec{\beta}\neq\vec{0}}{\Leftrightarrow}3\lambda\neq0\Leftrightarrow\lambda\neq0$

$\left(\lambda\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)\perp3\lambda\vec{\beta}\Leftrightarrow$

$\left(\lambda\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)\cdot3\lambda\vec{\beta}=0\Leftrightarrow3\lambda^2\vec{\alpha}\vec{\beta}-3\lambda\vec{\beta}^2=0\Leftrightarrow3\lambda^2\cdot1-3\lambda\left|\vec{\beta}\right|^2=0\Leftrightarrow$

$3\lambda^2-3\lambda=0\Leftrightarrow3\lambda(\lambda-1)=0\overset{\lambda\neq0}{\Leftrightarrow}\lambda=1$

Β3. Είναι $|\vec{u}|^2=\vec{u}^2=\left(\vec{\alpha}+2\vec{\beta}\right)^2=\vec{\alpha}^2+4\vec{\alpha}\vec{\beta}+4\vec{\beta}^2=|\vec{\alpha}|^2+4\cdot1+4\left|\vec{\beta}\right|^2=2^2+4+4\cdot1^2=12$

οπότε $|\vec{u}|=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$.

Είναι $|\vec{v}|^2 = \vec{v}^2 = (\vec{\alpha}-\vec{\beta})^2 = \vec{\alpha}^2 - 2\vec{\alpha}\vec{\beta} + \vec{\beta}^2 = |\vec{\alpha}|^2 - 2\cdot 1 + |\vec{\beta}|^2 = 2^2 - 2 + 1^2 = 3$
οπότε $|\vec{v}| = \sqrt{3}$.

Β4. Είναι $\vec{u}\cdot\vec{v} = (\vec{\alpha}+2\vec{\beta})(\vec{\alpha}-\vec{\beta}) = \vec{\alpha}^2 - \vec{\alpha}\vec{\beta} + 2\vec{\beta}\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}^2 = |\vec{\alpha}|^2 + \vec{\alpha}\vec{\beta} - 2|\vec{\beta}|^2 = 4+1-2 = 3$
οπότε $\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right) = \dfrac{\vec{u}\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \dfrac{3}{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2}$ άρα $\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right) = \dfrac{\pi}{3}$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Αν Κ το κέντρο του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ τότε Κ μέσο του ΑΓ οπότε $\mathrm{K}\left(\dfrac{x_\mathrm{A}+x_\Gamma}{2},\dfrac{y_\mathrm{A}+y_\Gamma}{2}\right)$ δηλαδή $\mathrm{K}\left(\dfrac{2+4}{2},\dfrac{3+(-3)}{2}\right)$ οπότε $\mathrm{K}(3,0)$.
Όμως Κ μέσο της ΒΔ οπότε
$x_\mathrm{K} = \dfrac{x_\mathrm{B}+x_\Delta}{2} \Leftrightarrow 3 = \dfrac{-1+x_\Delta}{2} \Leftrightarrow x_\Delta = 7$ και
$y_\mathrm{K} = \dfrac{y_\mathrm{B}+y_\Delta}{2} \Leftrightarrow 0 = \dfrac{1+y_\Delta}{2} \Leftrightarrow y_\Delta = -1$ οπότε $\Delta(7,-1)$.

Γ2. Είναι $\lambda_{\mathrm{A}\Gamma} = \dfrac{-3-3}{4-2} = -3$, οπότε $\mathrm{A}\Gamma: y-3 = -3(x-2)$ δηλαδή $\mathrm{A}\Gamma: y = -3x+9$
Είναι $\lambda_{\mathrm{B}\Delta} = \dfrac{-1-1}{7+1} = -\dfrac{1}{4}$, οπότε $\mathrm{B}\Delta: y-1 = -\dfrac{1}{4}(x+1)$ δηλαδή $\mathrm{B}\Delta: y = -\dfrac{1}{4}x + \dfrac{3}{4}$

Γ3. Είναι $\varepsilon \parallel \mathrm{A}\Gamma \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = \lambda_{\mathrm{A}\Gamma} \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = -3$ και αφού διέρχεται από το σημείο $\mathrm{B}(-1,1)$ έχει εξίσωση $\varepsilon: y-1 = -3(x+1) \Leftrightarrow \varepsilon: y = -3x-2$

Γ4. Αφού Μ μέσο της ΒΓ άρα $\mathrm{M}\left(\dfrac{x_\mathrm{B}+x_\Gamma}{2},\dfrac{y_\mathrm{B}+y_\Gamma}{2}\right)$ δηλαδή $\mathrm{M}\left(\dfrac{-1+4}{2},\dfrac{1+(-3)}{2}\right)$
οπότε $\mathrm{M}\left(\dfrac{3}{2},-1\right)$. Αν $\Lambda(x_\Lambda, y_\Lambda)$, αφού το Λ είναι σημείο της $\varepsilon: y = -3x-2$ άρα
$y_\Lambda = -3x_\Lambda - 2$ (1).
Α, Μ, Λ συνευθειακά όταν:

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}} \parallel \overrightarrow{\mathrm{M}\Lambda} \Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{\mathrm{AM}},\overrightarrow{\mathrm{M}\Lambda}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \dfrac{3}{2}-2 & -1-3 \\ x_\Lambda - \dfrac{3}{2} & y_\Lambda + 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & -4 \\ x_\Lambda - \frac{3}{2} & y_\Lambda + 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}(y_\Lambda + 1) - (-4)\left(x_\Lambda - \frac{3}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow -y_\Lambda - 1 + 8x_\Lambda - 12 = 0 \Leftrightarrow$$

$-y_\Lambda + 8x_\Lambda = 13$, όμως ισχύει και η σχέση (1), άρα από το σύστημα

$\left.\begin{aligned} 8x_\Lambda - y_\Lambda &= 13 \\ y_\Lambda &= -3x_\Lambda - 2 \end{aligned}\right\}$ έχουμε ότι $8x_\Lambda - (-3x_\Lambda - 2) = 13 \Leftrightarrow x_\Lambda = 1$.

Άρα από την σχέση (1) έχουμε $y_\Lambda = -3\cdot 1 - 2 = -5$, οπότε $\Lambda(1,-5)$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έχουμε ότι η ευθεία ε διέρχεται από το σημείο $A(1,0)$, άρα

$$\frac{|3\vec{\alpha}+2\vec{\beta}|-3|\vec{\alpha}|}{2} + |\vec{\alpha}| = 0 \Leftrightarrow |3\vec{\alpha}+2\vec{\beta}| - 3|\vec{\alpha}| = -2|\vec{\alpha}| \Leftrightarrow |3\vec{\alpha}+2\vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| \Leftrightarrow$$

$$|3\vec{\alpha}+2\vec{\beta}|^2 = |\vec{\alpha}|^2 \Leftrightarrow 9\vec{\alpha}^2 + 12\vec{\alpha}\vec{\beta} + 4\vec{\beta}^2 = \vec{\alpha}^2 \Leftrightarrow 12\vec{\alpha}\vec{\beta} = -9\vec{\alpha}^2 - 4\vec{\beta}^2 + \vec{\alpha}^2 \Leftrightarrow$$

$$12\vec{\alpha}\vec{\beta} = -8\vec{\alpha}^2 - 4(2|\vec{\alpha}|)^2 \Leftrightarrow 12\vec{\alpha}\vec{\beta} = -8\vec{\alpha}^2 - 16\vec{\alpha}^2 \Leftrightarrow 12\vec{\alpha}\vec{\beta} = -24\vec{\alpha}^2 \Leftrightarrow$$

$$\vec{\alpha}\vec{\beta} = -2\vec{\alpha}^2 \Leftrightarrow \vec{\alpha}\vec{\beta} = -2|\vec{\alpha}|^2 \Leftrightarrow \vec{\alpha}\vec{\beta} = -2|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\alpha}| \Leftrightarrow \vec{\alpha}\vec{\beta} = -|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$$

Άρα $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta}$.

Δ2. Έχουμε ότι: $\varepsilon_1 // \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon_1} = \lambda_{\varepsilon_2} \Leftrightarrow 2|\vec{\alpha}| + 3 = |\vec{\alpha}| + 5 \Leftrightarrow |\vec{\alpha}| = 2$.

Άρα $|\vec{\beta}| = 2|\vec{\alpha}| = 2\cdot 2 \Leftrightarrow |\vec{\beta}| = 4$ και $\vec{\alpha}\vec{\beta} = -|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}| \Leftrightarrow \vec{\alpha}\vec{\beta} = -2\cdot 4 = -8$.

Δ3. Έχουμε ότι $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta} \Rightarrow \vec{\beta} = \kappa\cdot\vec{\alpha}$ με $\kappa < 0$ άρα έχουμε ότι

$\vec{\beta} = \kappa\cdot\vec{\alpha} \Rightarrow |\vec{\beta}| = |\kappa|\cdot|\vec{\alpha}| \Leftrightarrow 2|\vec{\alpha}| = |\kappa|\cdot|\vec{\alpha}| \Leftrightarrow |\kappa| = 2$. Και επειδή $\kappa < 0$ έχουμε

ότι $\kappa = -2$. Επομένως $\vec{\beta} = -2\vec{\alpha}$.

Η ευθεία ε γράφεται διαδοχικά:

$$(\varepsilon): y = \frac{|3\vec{\alpha}+2\vec{\beta}|-3|\vec{\alpha}|}{2}x + |\vec{\alpha}| \Leftrightarrow y = \frac{|3\vec{\alpha}-4\vec{\alpha}|-3|\vec{\alpha}|}{2}x + |\vec{\alpha}| \Leftrightarrow (\varepsilon): y = -|\vec{\alpha}|x + |\vec{\alpha}| \Leftrightarrow$$

$y = -2x + 2$.

Δ4. Ισχύει ότι: $ΒΓ \perp \varepsilon \Leftrightarrow \lambda_{ΒΓ} \cdot \lambda_{\varepsilon} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{ΒΓ} \cdot (-2) = -1 \Leftrightarrow \lambda_{ΒΓ} = \frac{1}{2}$.

$(ΒΓ): y - y_{Β} = \lambda_{ΒΓ}(x - x_{Β}) \Leftrightarrow y - 2 = \frac{1}{2}\left(x - \frac{5}{2}\right) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$

Το μέσο Μ του ΒΓ είναι το σημείο τομής των ΒΓ και ε. Προκύπτει δε από την λύση του συστήματος:

$\left.\begin{array}{l} y = -2x + 2 \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4} \end{array}\right\}$ τα πρώτα μέλη των εξισώσεων είναι ίσα επομένως έχουμε ότι:

$\frac{1}{2}x + \frac{3}{4} = -2x + 2 \Leftrightarrow 2x + 3 = -8x + 8 \Leftrightarrow 10x = 5 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

Για $x = \frac{1}{2}$ ισχύει ότι: $y = -2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \Leftrightarrow y = 1$. Άρα $Μ\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

Μ μέσο του ΒΓ όταν :

$x_{Μ} = \frac{x_{Γ} + x_{Β}}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{x_{Γ} + \frac{5}{2}}{2} \Leftrightarrow x_{Γ} + \frac{5}{2} = 1 \Leftrightarrow x_{Γ} = -\frac{3}{2}$ και

$y_{Μ} = \frac{y_{Γ} + y_{Β}}{2} \Leftrightarrow 1 = \frac{y_{Γ} + 2}{2} \Leftrightarrow y_{Γ} + 2 = 2 \Leftrightarrow y_{Γ} = 0$ οπότε $Γ\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$.