



ΤΑΞΗ: Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ / ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Ημερομηνία: Σάββατο 11 Ιανουαρίου 2020
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ.60.

Α2.

- α)** Λ,
- β)** Σ,
- γ)** Λ,
- δ)** Λ,
- ε)** Σ

Α3. $\eta\mu\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\eta\mu\frac{3\pi}{2} = -1$$

$$\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\eta\mu\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

ΘΕΜΑ Β

B1. $D_f = (-5, 7]$

$f(-1) = -4$

$f(3) = 0$

$f(7) = 0$

B2. Η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-5, -1]$ και $[5, 7]$, γνησίως αύξουσα στο $[-1, 5]$ και παρουσιάζει ελάχιστο για $x = -1$ και μέγιστο για $x = 5$.

B3. $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3 \text{ ή } x = 7$

B4. Επειδή $f(x) \leq 2$ τότε η εξίσωση $f(x) = 5$ είναι αδύνατη, άρα δεν υπάρχουν κοινά σημεία.**ΘΕΜΑ Γ**

Γ1. $\eta\mu(\pi - \omega) = \eta\mu\omega$

$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) = \eta\mu\omega$

$\sigma\upsilon\nu(\pi - \omega) = -\sigma\upsilon\nu\omega$

$\sigma\upsilon\nu(-\omega) = \sigma\upsilon\nu\omega$

Άρα: $A = \eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$.

Επίσης $\eta\mu(\pi - \omega) = \eta\mu\omega$

$\sigma\upsilon\nu(\pi - \omega) = -\sigma\upsilon\nu\omega$

$\epsilon\varphi\left(\frac{11\pi}{2} - \omega\right) = \epsilon\varphi\left(4\pi + \frac{3\pi}{2} - \omega\right) = \epsilon\varphi\left(\frac{3\pi}{2} - \omega\right) = \sigma\varphi\omega$

$\sigma\upsilon\nu(19\pi - \omega) = \sigma\upsilon\nu(18\pi + \pi - \omega) = \sigma\upsilon\nu(\pi - \omega) = -\sigma\upsilon\nu\omega$

$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{23\pi}{2} + \omega\right) = \sigma\upsilon\nu\left(10\pi + \frac{3\pi}{2} + \omega\right) = \eta\mu\omega$

$$\sigma\phi(13\pi + \omega) = \sigma\phi(12\pi + \pi + \omega) = \sigma\phi(\pi + \omega) = \sigma\phi\omega$$

$$\text{Άρα: } B = \frac{\eta\mu\omega(-\sigma\upsilon\upsilon\omega)\sigma\phi\omega}{-\sigma\upsilon\upsilon\omega\eta\mu\omega\sigma\phi\omega} = 1.$$

Γ2. Αφού $x \in \mathbb{R}$ και $-x \in \mathbb{R}$, άρα $f(-x) = -x^3 - x = -f(x)$ τότε η f περιττή.

Γ3. $f(0) = 0$ άρα η εξίσωση

$$f(0) = 2\eta\mu^2x - 1 \Leftrightarrow$$

$$0 = 2\eta\mu^2x - 1 \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu^2x = \frac{1}{2} \text{ οπότε}$$

$$\eta\mu x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \text{ή } \eta\mu x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu x = \eta\mu \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \text{ή } \eta\mu x = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{4} \\ x = 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{4} \end{array} \right\} \kappa \in \mathbb{Z} \quad \text{ή} \quad \left. \begin{array}{l} x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{4} \\ x = 2\kappa\pi + \pi + \frac{\pi}{4} = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{4} \end{array} \right\} \kappa \in \mathbb{Z}$$

Γ4. $(x^3 + x)(x^2 - 2x + 1) \leq 0 \Leftrightarrow$

$$x(x^2 + 1)(x - 1)^2 \leq 0$$

Όμως $x^2 + 1 > 0$ και

$$(x - 1)^2 \geq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Άρα αρκεί $x \leq 0$ ή $x = 1$.

ΘΕΜΑ Δ

$$\Delta 1. \begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 3 \\ y = 1 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (1-x)^2 + x(1-x) = 3 \\ y = 1 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 1 - 2x + x - 3 = 0 \\ y = 1 - x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 2 = 0 \\ y = 1 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x+1) = 0 \\ y = 1 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 - x \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 - x \end{cases}$$

- Αν $x = 2 \Rightarrow y = -1$
- Αν $x = -1 \Rightarrow y = 2$
-

$\Delta 2.$ Αφού $\kappa > 0$, η λύση θα είναι $(2, -1)$ οπότε $f(x) = (\sigma\upsilon\nu\alpha - 3) \cdot x + 4\eta\mu^2\alpha + 3$
Επειδή $\sigma\upsilon\nu\alpha - 3 < 0$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, η f θα είναι γνησίως φθίνουσα για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$\Delta 3.$

Ισχύει

$$f(2) = -1 \Leftrightarrow (\sigma\upsilon\nu\alpha - 3)2 + 4\eta\mu^2\alpha + 3 = -1 \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu\alpha - 6 + 4(1 - \sigma\upsilon\nu^2\alpha) + 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu\alpha - 6 + 4 - 4\sigma\upsilon\nu^2\alpha + 4 = 0 \Leftrightarrow -4\sigma\upsilon\nu^2\alpha + 2\sigma\upsilon\nu\alpha + 2 = 0 \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - \sigma\upsilon\nu\alpha - 1 = 0$$

Αν $\sigma\upsilon\nu\alpha = \omega, (-1 \leq \omega \leq 1)$

$$2\omega^2 - \omega - 1 = 0$$

$$\Delta = 1 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 9$$

$$\omega_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{4} =$$

$$\omega_1 = 1 \text{ ή } \omega_2 = -\frac{1}{2}$$

Οπότε:

$$\sigma\upsilon\nu\alpha = 1$$

$$\sigma\upsilon\nu\alpha = \sigma\upsilon\nu 0$$

$$\alpha = 2\kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$\alpha \in [0, \pi] \Leftrightarrow 0 \leq \alpha \leq \pi$$

$$0 \leq 2\kappa\pi \leq \pi \Leftrightarrow 0 \leq \kappa \leq \frac{1}{2}$$

$$\kappa = 0 \text{ οπότε } \alpha = 0$$

ή

$$\sigma\upsilon\nu\alpha = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu\alpha = \sigma\upsilon\nu\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu\alpha = \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow$$

$$\alpha = 2\kappa\pi \pm \frac{2\pi}{3}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$\alpha \in [0, \pi] \Leftrightarrow 0 \leq \alpha \leq \pi$$

$$0 \leq 2\kappa\pi + \frac{2\pi}{3} \leq \pi$$

$$0 \leq 2\kappa\pi - \frac{2\pi}{3} \leq \pi$$

$$-\frac{2\pi}{3} \leq 2\kappa\pi \leq \pi - \frac{2\pi}{3} \quad \frac{2\pi}{3} \leq 2\kappa\pi \leq \pi + \frac{2\pi}{3}$$

$$-\frac{2\pi}{3} \leq 2\kappa\pi \leq \frac{\pi}{3} \quad \frac{2\pi}{3} \leq 2\kappa\pi \leq \frac{5\pi}{3}$$

$$-\frac{1}{3} \leq \kappa \leq \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{3} \leq \kappa \leq \frac{5}{6}$$

$$\kappa = 0$$

αδύνατη

$$\alpha = \frac{2\pi}{3}$$

Δ4. Επειδή $-1 \leq \sigma\upsilon\nu\alpha \leq 1 \Leftrightarrow -4 \leq \sigma\upsilon\nu\alpha - 3 \leq -2$, άρα $\sigma\upsilon\nu\alpha - 3 < 0 \Rightarrow f \downarrow$ στο \mathbb{R} .

$$\left(f\left(\frac{1}{2}\right) - f(0)\right)x < f(0) - f\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \left(f\left(\frac{1}{2}\right) - f(0)\right)x + f\left(\frac{1}{2}\right) - f(0) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(f\left(\frac{1}{2}\right) - f(0)\right)(x+1) < 0$$

$$\text{Επειδή: } 0 < \frac{1}{2} \xrightarrow{f \downarrow} f(0) > f\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\text{Τότε } f\left(\frac{1}{2}\right) - f(0) < 0 \text{ άρα } x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -1.$$