ΤΑΞΗ: Α΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ

Ημερομηνία: Τρίτη 7 Ιανουαρίου 2020
Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΟΕΦΕ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 63

Α2.

ΣΤΗΛΗ Α ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ	ΣΤΗΛΗ Β ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ
α	3
β	8
γ	2
δ	5
ε	7
στ	4
ζ	6
η	1

Α3.

α. Λάθος
β. Σωστό
γ. Σωστό
δ. Λάθος
ε. Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. Έχουμε:

$$A=\sqrt{4-4x+x^2}+\sqrt{y^2-8y+16}\Leftrightarrow$$
$$A=\sqrt{(2-x)^2}+\sqrt{(y-4)^2}\Leftrightarrow$$
$$A=|2-x|+|y-4|$$

Β2

i) Γνωρίζουμε ότι:

- Αφού $x<1<2$ τότε θα είναι $x<2\Leftrightarrow 0<2-x$ οπότε $|2-x|=2-x$
- Αφού $y<4\Leftrightarrow y-4<0$ οπότε $|y-4|=-y+4$

Έτσι η παράσταση Α γίνεται,

$$A=|2-x|+|y-4|=2-x+(-y+4)=2-x-y+4=-x-y+6$$

ii) Από την ανισότητα $-1<x<1$ διαδοχικά έχουμε :

$$-1<x<1\overset{\cdot(-1)}{\Leftrightarrow}$$
$$1>-x>-1\Leftrightarrow$$
$$-1<-x<1 \qquad (1)$$

Από την ανισότητα $-2<y<4$ διαδοχικά έχουμε :

$$-2<y<4\overset{\cdot(-1)}{\Leftrightarrow}$$
$$2>-y>-4\Leftrightarrow$$
$$-4<-y<2 \qquad (2)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισότητες (1) και (2),που έχουν την ίδια φορά, και έχουμε:

$$-5<-x-y<3\overset{+6}{\Leftrightarrow}$$
$$-5+6<-x-y+6<3+6\Leftrightarrow$$
$$1<A<9$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1 Έχουμε:

$$\alpha=\sqrt{2}\cdot\sqrt{4-\sqrt{14}}\cdot\sqrt{4+\sqrt{14}}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{\left(4-\sqrt{14}\right)\cdot\left(4+\sqrt{14}\right)}=$$

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt{4^2-\left(\sqrt{14}\right)^2}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{16-14}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=\left(\sqrt{2}\right)^2=2$$

$$\beta=\sqrt{2}\cdot\sqrt[6]{2^7}\cdot\sqrt[3]{2}=2^{\frac{1}{2}}\cdot2^{\frac{7}{6}}\cdot2^{\frac{1}{3}}=$$

$$2^{\frac{1}{2}+\frac{7}{6}+\frac{1}{3}}=2^{\frac{3}{6}+\frac{7}{6}+\frac{2}{6}}=2^{\frac{12}{6}}=2^2=4$$

Γ2. Αντικαθιστούμε στην παράσταση γ όπου α=2 και β=4 και έχουμε :

$$\gamma=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}-\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{4}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}+\frac{2}{2+\sqrt{2}}=$$

$$\frac{\sqrt{2}\left(2+\sqrt{2}\right)}{\left(2-\sqrt{2}\right)\left(2+\sqrt{2}\right)}+\frac{2\left(2-\sqrt{2}\right)}{\left(2-\sqrt{2}\right)\left(2+\sqrt{2}\right)}=\frac{2\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2}{2^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}+\frac{4-2\sqrt{2}}{2^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=$$

$$\frac{2\sqrt{2}+2}{4-2}+\frac{4-2\sqrt{2}}{4-2}=\frac{2\sqrt{2}+2+4-2\sqrt{2}}{2}=\frac{6}{2}=3$$

Γ3. Αντικαθιστούμε στην ισότητα όπου γ=3, α=2 και β=4 και έχουμε :

$$x^2+y^2+4+6=\left(3+3\right)x-2y\Leftrightarrow$$

$$x^2+y^2+10=6x-2y\Leftrightarrow$$

$$x^2-6x+y^2+2y+10=0\Leftrightarrow$$

$$x^2-6x+9+y^2+2y+1=0\Leftrightarrow$$

$$\left(x-3\right)^2+\left(y+1\right)^2=0\Leftrightarrow$$

$x-3=0$ και $y+1=0\Leftrightarrow$

$x=3$ και $y=-1$

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1. Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα:

$$\lambda^2(\lambda x-1)=8x-2\lambda \Leftrightarrow \lambda^3 x-\lambda^2=8x-2\lambda \Leftrightarrow$$

$$\lambda^3 x-8x=\lambda^2-2\lambda \Leftrightarrow (\lambda^3-8)x=\lambda(\lambda-2) \quad (1)$$

Δ2. Για να είναι η παραπάνω εξίσωση ταυτότητα στο σύνολο των πραγματικών αριθμών πρέπει

$$\begin{cases}\lambda^3-8=0\\ \text{και}\\ \lambda(\lambda-2)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda^3=8\\ \text{και}\\ \lambda=0 \text{ ή } \lambda-2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda=\sqrt[3]{8}\\ \text{και}\\ \lambda=0 \text{ ή } \lambda=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda=2\\ \text{και}\\ \lambda=0 \text{ ή } \lambda=2\end{cases} \Leftrightarrow \lambda=2$$

Για λ=2 η (1) γίνεται $(2^3-8)x=2(2-2) \Leftrightarrow 0x=0$ και είναι ταυτότητα.

Δ3. Για $\lambda=2$ η εξίσωση γίνεται :

$$|x-4|=x-2$$

Επειδή το πρώτο μέλος της εξίσωσης είναι μη αρνητικό, για να έχει λύση η εξίσωση θα πρέπει και το δεύτερο μέλος να είναι μη αρνητικό οπότε :

$$x-2\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 2$$

Για $x\geq 2$ έχουμε:

$$|x-4|=x-2 \Leftrightarrow$$

$$x-4=x-2 \quad \text{ή} \quad x-4=-x+2 \Leftrightarrow$$

$$0x=2 \text{ αδύνατη }, \quad 2x=6 \Leftrightarrow$$

$$x=3$$

Η x=3 είναι λύση της εξίσωσης γιατί ικανοποιεί τον περιοριμό $x\geq 2$

Δ4.

i) Έχουμε:

$\lambda > 2 \Leftrightarrow \lambda^3 > 2^3 \Leftrightarrow \lambda^3 > 8$

Αφού $\lambda > 2$ τότε:

$\lambda > 0$ και $\lambda - 2 > 0$

Άρα $\lambda(\lambda - 2) > 0$ ως γινόμενο ομόσημων παραστάσεων .

ii) Από τις ιδιότητες των απόλυτων τιμών γνωρίζουμε ότι:

$|x + \alpha| \leq |x| + |\alpha|$ με την ισότητα να ισχύει αν και μόνο αν οι αριθμοί x και α είναι ομόσημοι ή ένας τουλάχιστον από αυτούς είναι μηδέν.

Είναι $(\lambda^3 - 8)x = \lambda(\lambda - 2) \Rightarrow x = \dfrac{\lambda(\lambda - 2)}{\lambda^3 - 8} > 0$ από το προηγούμενο ερώτημα.

Αφού x>0 τότε για να ισχύει η ισότητα $|x + \alpha| = |x| + |\alpha|$ θα πρέπει είτε $\alpha = 0$ είτε $\alpha > 0$ άρα πρέπει $\alpha \geq 0$

ΟΕΦΕ