

ΤΑΞΗ: Γ' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: ΘΕΤΙΚΗ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Ημερομηνία: Κυριακή 3 Μαΐου 2015

Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A.1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε:

$$f'(x_0) = 0$$

Μονάδες 8

A.2. Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle και να δώσετε την γεωμετρική ερμηνεία.

Μονάδες 4

A.3. Πότε η ευθεία $y = \ell$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$;

Μονάδες 3

A.4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη:

i) Οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z και \bar{z} στο μιγαδικό επίπεδο είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον άξονα των πραγματικών αριθμών xx' .

Μονάδες 2

ii) Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$.

Μονάδες 2

iii) Αν μια συνάρτηση f είναι κοίλη σ' ένα διάστημα Δ , τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται "πάνω" από τη γραφική της παράσταση, με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.

Μονάδες 2

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2015
Β' ΦΑΣΗ

E_3.BM13ΘΤ(ε)

iv) Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα $f([\alpha, \beta]) = [f(\beta), f(\alpha)]$.

Μονάδες 2

v) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ τότε ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z και w για τους οποίους ισχύουν:

- $\left| z + \left(\frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \right)^{99} \right|^2 + \left| z - \left(\frac{1 + i}{\sqrt{2}} \right)^{100} \right|^2 = 4$ και
- $2w \cdot z - 2z - w + 4 = 0$

B.1. Να δείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z στο μιγαδικό επίπεδο είναι ο κύκλος (C) με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα 1.

Μονάδες 8

B.2. Να δείξετε ότι $|w| = 2$

Μονάδες 6

B.3. Έστω z_1, z_2, z_3 μιγαδικοί αριθμοί με εικόνες στο μιγαδικό επίπεδο τα σημεία A, B και Γ αντίστοιχα. Αν οι εικόνες των σημείων A, B και Γ ανήκουν στον κύκλο (C) τότε να δείξετε:

i. ότι ο αριθμός $t = \frac{z_1 + z_2 + z_3 + z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1}{1 + z_1 z_2 z_3}$ είναι πραγματικός.

Μονάδες 6

ii. ισχύει $\frac{1}{3} \leq \left| \frac{z_1 - w}{w - z_2} \right| \leq 3$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f:(-1,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$ και $G:(-1,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν

- Η f είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x > -1$
- $f(0) = 2$
- $f'(x) - f(x) = \frac{1}{x+1} - \ln(x+1) - 3$, για κάθε $x > -1$.
- $G(x) = \frac{2 - f(x) + \ln(x+1)}{x \cdot e^x + 1}$, για κάθε $x > -1$.

Γ.1. Να δείξετε ότι $f(x) = 3 - e^x + \ln(x+1)$, για κάθε $x > -1$.

Μονάδες 6

Γ.2. α. Να δείξετε ότι η εξίσωση

$$e^x - \ln(x+1) = 3$$

έχει ακριβώς δύο στερόσημες ρίζες ρ_1, ρ_2 στο διάστημα $(-1, +\infty)$.

Μονάδες 5

β. Να δείξετε ότι η εξίσωση

$$3 + \ln(x+1) = e^x + \alpha x^3 \text{ με } \alpha \in \mathbb{R}$$

έχει μια τουλάχιστον λύση στο διάστημα $[\rho_1, \rho_2]$.

Μονάδες 5

γ. Να λύσετε την ανίσωση $\ln(\ln x + 1) + e^{x-1} > \ln x + x$, για κάθε $x > 1$.

Μονάδες 4

Γ.3. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικός πραγματικός αριθμός $x_0 > -1$ τέτοιος ώστε η συνάρτηση G να παρουσιάζει στη θέση x_0 τοπικό μέγιστο και ισχύει η σχέση

$$e^{x_0} = x_0 + 2$$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Θεωρούμε τη συνάρτηση f , παραγωγίσιμη για κάθε $x \in [0, +\infty)$ και τις συναρτήσεις H και G για τις οποίες ισχύουν:

- $f(0) = 1$,
- $H(x) = e^{2x} \cdot f(x)$, γνησίως αύξουσα για κάθε $x \in [0, +\infty)$
- $G(x) = e^x \int_0^x f(t) dt$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$

Να δείξετε ότι:

Δ.1. α. η συνάρτηση G είναι κυρτή.

Μονάδες 4

β. $x < G(x) < x \cdot G'(x)$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$ και

Μονάδες 3

γ. $\int_{x_0}^1 G(x) dx < \frac{G(1) - x_0 \cdot G(x_0)}{2}$, όπου $x_0 \in (0, 1)$.

Μονάδες 3

Δ.2. Αν $f'(0) = \frac{2015}{3}$ τότε να βρείτε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x x \cdot f(t) dt - x^2}{x - \eta\mu x}$$

Μονάδες 5

Δ.3. Να δείξετε ότι ισχύει

$$G(x+1) + \int_{x+1}^{x+2} G(t) dt < G(x+2) + \int_x^{x+1} G(t) dt, \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty).$$

Μονάδες 5

Δ.4. Αν επί πλέον η f' είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$, η γραφική παράσταση της συνάρτησης F με τύπο $F(x) = \int_0^x e^t \cdot f'(t) dt$ διέρχεται από το σημείο $A(1, e \cdot f(1) - 2)$ και E το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της G , την εφαπτομένη της στο σημείο $O(0, G(0))$ και την ευθεία $x = 1$ τότε να δείξετε ότι $E = \frac{2G(1) - 3}{2}$.

Μονάδες 5