ΤΑΞΗ: **3η ΤΑΞΗ ΕΠΑ.Λ. (Β΄ ΟΜΑΔΑ)**
ΜΑΘΗΜΑ: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

Ημερομηνία: Κυριακή 3 Μαΐου 2015
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α.1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε:

$$f'(x_0)=0$$

Μονάδες 8

Α.2. Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle και να δώσετε την γεωμετρική ερμηνεία.

Μονάδες 4

Α.3. Πότε η ευθεία $y=\ell$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$;

Μονάδες 3

Α.4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη* ***Σωστό,*** *αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη:*

i) Οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z και $\bar{z}$ στο μιγαδικό επίπεδο είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον άξονα των πραγματικών αριθμών xx'.

Μονάδες 2

ii) Η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$.

Μονάδες 2

iii) Αν μια συνάρτηση f είναι κοίλη σ' ένα διάστημα Δ, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται "πάνω" από τη γραφική της παράσταση, με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.

Μονάδες 2

iv) Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα $f([\alpha,\beta])=[f(\beta),f(\alpha)]$.

Μονάδες 2

v) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ τότε ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=-\infty$

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z και w για τους οποίους ισχύουν:

- $\left|z+\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{99}\right|^2+\left|z-\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{100}\right|^2=4$ και
- $2w\cdot z-2z-w+4=0$

Β.1. Να δείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z στο μιγαδικό επίπεδο είναι ο κύκλος (C) με κέντρο O(0,0) και ακτίνα 1.

Μονάδες 8

Β.2. Να δείξετε ότι $|w|=2$

Μονάδες 6

Β.3. Έστω z_1,z_2,z_3 μιγαδικοί αριθμοί με εικόνες στο μιγαδικό επίπεδο τα σημεία Α, Β και Γ αντίστοιχα. Αν οι εικόνες των σημείων Α, Β και Γ ανήκουν στον κύκλο (C) τότε να δείξετε:

i. ότι ο αριθμός $t=\frac{z_1+z_2+z_3+z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1}{1+z_1z_2z_3}$ είναι πραγματικός.

Μονάδες 6

ii. ισχύει $\frac{1}{3}\le\left|\frac{z_1-w}{w-z_2}\right|\le 3$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$ και $G:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν

- Η f είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x>-1$
- $f(0)=2$
- $f'(x)-f(x)=\dfrac{1}{x+1}-\ln(x+1)-3$, για κάθε $x>-1$.
- $G(x)=\dfrac{2-f(x)+\ln(x+1)}{x\cdot e^x+1}$, για κάθε $x>-1$.

Γ.1. Να δείξετε ότι $f(x)=3-e^x+\ln(x+1)$, για κάθε $x>-1$.

Μονάδες 6

Γ.2. **α.** Να δείξετε ότι η εξίσωση

$$e^x-\ln(x+1)=3$$

έχει ακριβώς δύο ετερόσημες ρίζες ρ_1,ρ_2 στο διάστημα $(-1,+\infty)$.

Μονάδες 5

β. Να δείξετε ότι η εξίσωση

$$3+\ln(x+1)=e^x+\alpha x^3 \text{ με } \alpha\in\mathbb{R}$$

έχει μια τουλάχιστον λύση στο διάστημα $[\rho_1,\rho_2]$.

Μονάδες 5

γ. Να λύσετε την ανίσωση $\ln(\ln x+1)+e^{x-1}>\ln x+x$, για κάθε $x>1$.

Μονάδες 4

Γ.3. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικός πραγματικός αριθμός $x_0>-1$ τέτοιος ώστε η συνάρτηση G να παρουσιάζει στη θέση x_0 τοπικό μέγιστο και ισχύει η σχέση

$$e^{x_0}=x_0+2$$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Θεωρούμε τη συνάρτηση f, παραγωγίσιμη για κάθε $x \in [0,+\infty)$ και τις συναρτήσεις H και G για τις οποίες ισχύουν:

- $f(0)=1$,
- $H(x)=e^{2x}\cdot f(x)$, γνησίως αύξουσα για κάθε $x \in [0,+\infty)$
- $G(x)=e^{x}\int_0^x f(t)dt$ για κάθε $x \in [0,+\infty)$

Να δείξετε ότι:

Δ.1. **α.** η συνάρτηση G είναι κυρτή.

Μονάδες 4

β. $x < G(x) < x\cdot G'(x)$, για κάθε $x \in (0,+\infty)$ και

Μονάδες 3

γ. $\int_{x_0}^{1} G(x)dx < \dfrac{G(1)-x_0\cdot G(x_0)}{2}$, όπου $x_0 \in (0,1)$.

Μονάδες 3

Δ.2. Αν $f'(0)=\dfrac{2015}{3}$ τότε να βρείτε το όριο

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x x\cdot f(t)dt - x^2}{x-\eta\mu x}$$

Μονάδες 5

Δ.3. Να δείξετε ότι ισχύει

$$G(x+1)+\int_{x+1}^{x+2} G(t)dt < G(x+2)+\int_{x}^{x+1} G(t)dt, \text{ για κάθε } x \in (0,+\infty).$$

Μονάδες 5

Δ.4. Αν επί πλέον η f' είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$, η γραφική παράσταση της συνάρτησης F με τύπο $F(x)=\int_0^x e^t\cdot f'(t)dt$ διέρχεται από το σημείο $A(1, e\cdot f(1)-2)$ και E το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της G, την εφαπτομένη της στο σημείο $O(0,G(0))$ και την ευθεία $x=1$ τότε να δείξετε ότι $E=\dfrac{2G(1)-3}{2}$.

Μονάδες 5