ΤΑΞΗ: **Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

ΜΑΘΗΜΑ: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ / ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ**

Ημερομηνία: Κυριακή 13 Απριλίου 2014

Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό σελ. 152.

Α2. Σχολικό σελ. 16.

Α3. Σχολικό σελ. 73.

Α4. **α)** Σωστό **β)** Λάθος **γ)** Σωστό **δ)** Λάθος **ε)** Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Για την $f(x)=ax^3+\beta x^2+1$ έχουμε $f'(x)=3ax^2+2\beta x$.

Β1. Αφού $\mathrm{A}(2,5)\in C_f \Leftrightarrow f(2)=5 \Leftrightarrow 8a+4\beta+1=5 \Leftrightarrow 8a+4\beta=4 \Leftrightarrow 2\alpha+\beta=1$ (1)

Αφού η εφαπτομένη στο Α έχει συντελεστή διεύθυνσης 12 πρέπει:

$f'(2)=12 \Leftrightarrow 12\alpha+4\beta=12 \Leftrightarrow 3\alpha+\beta=3$ (2)

Από την (1) και (2) προκύπτουν: $\alpha=2$ και $\beta=-3$.

Έτσι έχουμε $f(x)=2x^3-3x^2+1$ και $f'(x)=6x^2-6x$.

Β2. Έστω $(\varepsilon): y=\lambda x+\kappa$ η εξίσωση της ζητούμενης εφαπτομένης τότε:

- $\lambda=f'(-1)=12$
- $B(-1,f(-1))\in(\varepsilon) \Leftrightarrow \mathrm{B}(-1,-4)\in(\varepsilon) \Leftrightarrow -4=-\lambda+\kappa \Leftrightarrow -4=-12+\kappa \Leftrightarrow \kappa=8$

Άρα $(\varepsilon): y=12x+8$.

Β3. $f'(x)=0 \Leftrightarrow 6x^2-6x=0 \Leftrightarrow 6x\cdot(x-1)=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ ή } x=1$.

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

- Για $x\in(-\infty,0]$ η f είναι γνησίως αύξουσα.
- Για $x\in[0,1]$ η f είναι γνησίως φθίνουσα.
- Για $x\in[1,+\infty)$ η f είναι γνησίως αύξουσα.
- Στο $x_1=0$ η f έχει τ. μέγιστο το $f(0)=1$.
- Στο $x_2=1$ η f έχει τ. ελάχιστο το $f(1)=0$.

Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$ και $2013<2014 \Leftrightarrow f(2013)<f(2014)$.

Β4. Έχω $f(x)=2x^3-3x^2+1$ άρα $f'(x)=6x^2-6x$ και $f''(x)=12x-6$

Η εφαπτομένη της C_f παράλληλη του $xx' \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f'(\kappa)=0 \Leftrightarrow 6\kappa^2-6\kappa=0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \kappa=0$ ή $\kappa=1$ αλλά $\kappa\epsilon\Omega$ άρα το $\mathrm{A}=\{0,1\}$

Η εφαπτομένη της $C_{f'}$ έχει κλίση θετική $\Leftrightarrow f''(\lambda)>0 \Leftrightarrow 12\lambda-6>0 \Leftrightarrow \lambda>\frac{1}{2}$, $\lambda\in\Omega$.

άρα $\mathrm{B}=\{1,2,3\}$

$\mathrm{N}(\Omega)=7$, $P(\mathrm{A})=\frac{\mathrm{N}(\mathrm{A})}{\mathrm{N}(\Omega)}=\frac{2}{7}$ και $P(\mathrm{B})=\frac{\mathrm{N}(\mathrm{B})}{\mathrm{N}(\Omega)}=\frac{3}{7}$

Το ενδεχόμενο Γ: "Να μην πραγματοποιηθεί κανένα από Α και Β" τότε $\Gamma=(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})'$.

Το $\mathrm{A}\cup\mathrm{B}=\{0,1,2,3\}$ άρα $(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})'=\{-4,-2,-1\}$ άρα $P(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})'=\frac{3}{7}$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. α)

Χρόνια Εργασίας	x_i	ν_i	f_i	N_i	F_i	$x_i\nu_i$	$(x_i-\bar{x})^2\cdot\nu_i$
4 - 8	6	8	0,2	8	0,2	48	288
8 - 12	10	16	0,4	24	0,6	160	64
12 - 16	14	4	0,1	28	0,7	56	16
16 - 20	18	12	0,3	40	1	216	432
ΣΥΝΟΛΟ		$\nu=40$	1			480	800

β) Έστω το ενδεχόμενο Γ: «Υπάλληλος με 11 τουλάχιστον χρόνια εργασίας στο εργοστάσιο Α» Θεωρώντας ότι οι τιμές σε κάθε κλάση είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες έχουμε:

$$P(\Gamma)=\frac{N(\Gamma)}{N(\Omega)}=\frac{\frac{1}{4}\cdot 16+4+12}{40}=\frac{20}{40}=\frac{1}{2}.$$

γ) $$\bar{x}_A=\frac{\sum_{i=1}^{4}x_i\nu_i}{\nu}=\frac{480}{40}=12.$$

$$S_A^2=\frac{\sum_{i=1}^{4}(x_i-\bar{x})^2\cdot\nu_i}{\nu}=\frac{800}{40}=20.$$

Γ2. α) Στο εργοστάσιο της πόλης Β εργάζονται: $\nu_B=\nu-\nu_A=200-40=160$ υπάλληλοι. Θεωρώντας y_i με $i=1,2,\ldots 160$ τα έτη εργασίας του καθενός από αυτούς στο εργοστάσιο της πόλης Β έχουμε:

$$\bar{x}=13,6\Leftrightarrow\frac{\sum_{i=1}^{40}x_i+\sum_{i=1}^{160}y_i}{200}=13,6\Leftrightarrow\frac{40\cdot\bar{x}_A+160\cdot\bar{x}_B}{200}=13,6\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 40\cdot 12+160\cdot\bar{x}_B=2720\Leftrightarrow 160\cdot\bar{x}_B=2240\Leftrightarrow\bar{x}_B=14.$$

β) Οι 4 υπάλληλοι αποτελούν το: $\frac{4}{160}\cdot 100\%=2,5\%$ των εργαζομένων στο εργοστάσιο της πόλης Β. Λόγω της κανονικής κατανομής ξέρουμε ότι τουλάχιστον $\bar{x}_B+2S_B$ αποτελεί το 2,5% των εργαζομένων. Άρα $\bar{x}_B+2S_B=22\Leftrightarrow 14+2S_B=22\Leftrightarrow S_B=4$.

Γ3. **α)** $CV_A = \frac{S_A}{\bar{x}_A} = \frac{\sqrt{20}}{12} = \frac{2\sqrt{5}}{12} = \frac{\sqrt{5}}{6}$.

$CV_B = \frac{S_B}{\bar{x}_B} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7}$.

Ισχύει $CV_A > CV_B$.

$\left(\text{Αφού}: \frac{\sqrt{5}}{6} > \frac{2}{7} \Leftrightarrow \frac{5}{36} > \frac{4}{49} \Leftrightarrow \frac{245}{1764} > \frac{114}{1764} \right)$

Άρα στο εργοστάσιο της Β πόλης έχουμε μεγαλύτερη ομοιογένεια, ως προς το χρόνο εργασίας.

β) Στο εργοστάσιο της πόλης Α θα απολυθούν: $4+12=16$ υπάλληλοι.
Ο νέος πίνακας συχνοτήτων στο τέλος της επόμενης τετραετίας θα είναι:

Χρόνια Εργασίας	x_i	v_i	$x_i v_i$
0 - 4	2	16	32
4 - 8	6	0	0
8 - 12	10	8	80
12 - 16	14	16	224
ΣΥΝΟΛΟ		$v=40$	336

Ο νέος μέσος χρόνος εργασίας των υπαλλήλων της πόλης Α είναι:

$$\bar{x}'_A = \frac{\sum_{i=1}^{40} x_i v_i}{40} = \frac{336}{40} = 8,4$$

Στο εργοστάσιο της πόλης Β, αφού δεν έχουμε αλλαγές στο εργατικό δυναμικό, στο τέλος της τετραετίας ο νέος μέσος χρόνος εργασίας είναι: $\bar{x}'_B = \bar{x}_B + 4 = 14 + 4 = 18$ (χρήση εφαρμογής σχολικού).

Άρα ο ολικός νέος μέσος χρόνος εργασίας των υπαλλήλων της εταιρείας θα είναι:

$$\bar{x}' = \frac{\sum_{i=1}^{40} x'_i + \sum_{i=1}^{160} y'_i}{200} = \frac{v_A \cdot \bar{x}'_A + v_B \cdot \bar{x}'_B}{200} = \frac{40 \cdot 8,4 + 160 \cdot 18}{200} = \frac{336 + 2880}{200} =$$

$$= \frac{3216}{200} = 16,08 \text{ έτη.}$$

ΘΕΜΑ Δ

Ισχύει: $2P(-1) = 2P(0) = 2P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = \kappa$.

Άρα $P(-1) = P(0) = P(1) = \frac{\kappa}{2}$ και $P(2) = P(3) = P(4) = \kappa$.

Δ1. Αφού η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ πρέπει:

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$ (1).

- $f(0) = -a^2 - 6a$ (2)
- $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}(e^{ax^2+2x} - 3x^2 + 2x + 8) = 1 + 8 = 9$ (3)

Έτσι από (1), (2), (3) έχουμε:

$-\alpha^2 - 6\alpha = 9 \Leftrightarrow \alpha^2 + 6\alpha + 9 = 0 \Leftrightarrow (\alpha+3)^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = -3$

Δ2. Αφού $P(\Omega) = 1 \Leftrightarrow P(-1) + P(0) + P(1) + P(2) + P(3) + P(4) = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{\kappa}{2} + \dfrac{\kappa}{2} + \dfrac{\kappa}{2} + \kappa + \kappa + \kappa = 1 \Leftrightarrow \dfrac{3\kappa}{2} + 3\kappa = 1 \Leftrightarrow \dfrac{9\kappa}{2} = 1 \Leftrightarrow \kappa = \dfrac{2}{9}$.

Άρα: $P(-1) = P(0) = P(1) = \dfrac{1}{9}$ και $P(2) = P(3) = P(4) = \dfrac{2}{9}$.

Δ3. **α)** Για $x > 0$ έχουμε:

$f'(x) = \left(e^{-3x^2+2x} - 3x^2 + 2x + 8\right)' = e^{-3x^2+2x} \cdot (-3x^2 + 2x)' - 6x + 2 =$

$= (-6x+2) \cdot e^{-3x^2+2x} - 6x + 2 = (-6x+2) \cdot (e^{-3x^2+2x} + 1)$

Έτσι $\lim\limits_{x\to \frac{1}{3}} \left(\dfrac{f'(x)}{-6x+2} - e^x\right) = \lim\limits_{x\to \frac{1}{3}} \left(\dfrac{(-6x+2)\cdot(e^{-3x^2+2x}+1}{-6x+2} - e^x\right) =$

$= \lim\limits_{x\to \frac{1}{3}} \left(e^{-3x^2+2x} + 1 - e^x\right) = e^{\frac{1}{3}} + 1 - e^{\frac{1}{3}} = 1$.

Έτσι: $\mathrm{B} = \{0, 1, -2y+4\}$. Αφού: $\mathrm{A} = \{1, y^2 - 4y + 5, 4\}$ και $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \{1, 2\}$,

πρέπει το 2 να περιέχεται και στα δύο σύνολα.

Έτσι πρέπει: $-2y + 4 = 2$ (1) και $y^2 - 4y + 5 = 2$ (2)

Από (1): $-2y = -2 \Leftrightarrow y = 1$ και (2): $y^2 - 4y + 3 = 0 \Leftrightarrow y = 1$ ή $y = 3$.

Άρα πρέπει $y = 1$.

β) Για $y=1$ τα σύνολα γίνονται: $A=\{1,2,4\}$, $B=\{0,1,2\}$.

Έτσι: $P(A)=P(1)+P(2)+P(4)=\frac{1}{9}+\frac{2}{9}+\frac{2}{9}=\frac{5}{9}$.

$P(B)=P(0)+P(1)+P(2)=\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{2}{9}=\frac{4}{9}$.

Αφού: $A\cup B=\{0,1,2,4\}$ έχουμε $P(A\cup B)=P(0)+P(1)+P(2)+P(4)=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$.

Αφού: $A-B=\{4\}$ έχουμε $P(A-B)=P(4)=\frac{2}{9}$.

Δ4. **α)** Έχουμε $g'(x)=2x+1-e$

Έστω $(\varepsilon): y=ax+\beta$ η εξίσωση της ζητούμενης εφαπτομένης της C_g στο σημείο της $\Delta(x_0,g(x_0))$. Τότε ισχύουν:

- Αφού $\varepsilon // \eta \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon=\lambda_\eta \Leftrightarrow \alpha=3-e$ (1).
- $g'(x_0)=a\Leftrightarrow 2x_0+1-e=a\overset{(1)}{\Leftrightarrow}2x_o+1-e=3-e\Leftrightarrow 2x_0=2\Leftrightarrow x_0=1$.
- $\Delta\in(\varepsilon)\Leftrightarrow g(1)=(3-e)\cdot 1+\beta\Leftrightarrow 1+1-e-e=3-e+\beta\Leftrightarrow 2-2e=3-e+\beta\Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow \beta=-1-e$ (2)

Έτσι χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (1), (2) έχουμε για εφαπτομένη την $(\varepsilon): y=(3-e)x-1-e$.

β) Έχουμε $E=\left\{\frac{5}{9},\frac{2}{9},\frac{2}{3}\right\}$.

Για τα σημεία $M_\nu(x_\nu,y_\nu)$, με $\nu=1,2,3$ της εφαπτομένης (ε) έχουμε:

- $M_1\left(\frac{5}{9},\frac{6}{9}-\frac{14e}{9}\right)$, αφού $y_1=(3-e)\cdot\frac{5}{9}-1-e=\frac{15}{9}-\frac{5e}{9}-1-e=\frac{6}{9}-\frac{14e}{9}$.
- $M_2\left(\frac{2}{9},\frac{-3}{9}-\frac{11e}{9}\right)$, αφού $y_2=(3-e)\cdot\frac{2}{9}-1-e=\frac{6}{9}-\frac{2e}{9}-1-e=\frac{-3}{9}-\frac{11e}{9}$.
- $M_3\left(\frac{2}{3},1-\frac{5}{3}e\right)$, αφού $y_3=(3-e)\cdot\frac{2}{3}-1-e=2-\frac{2}{3}e-1-e=1-\frac{5}{3}e$.

Άρα $\bar{y}=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}=\frac{\frac{6}{9}-\frac{14e}{9}-\frac{3}{9}-\frac{11e}{9}+1-\frac{5e}{3}}{3}=\frac{\frac{12}{9}-\frac{40e}{9}}{3}=\frac{12-40e}{27}$.