ΤΑΞΗ: 3η ΤΑΞΗ ΕΠΑ.Λ. (Α΄ ΟΜΑΔΑ)

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι/ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Ημερομηνία: Κυριακή 27 Απριλίου 2014

Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω συνεχής συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ με παράγουσα συνάρτηση F. Τη σταθερή διαφορά F(β) – F(α) ονομάζουμε ορισμένο ολοκλήρωμα της συνάρτησης f από το α έως το β και το συμβολίζουμε με: $\int_\alpha^\beta f(x)dx=[F(x)]_\alpha^\beta=F(\beta)-F(\alpha)$.

Α2. $1\to\Lambda$, $2\to\Sigma$, $3\to\Lambda$, $4\to\Lambda$, $5\to\Sigma$.

Α3. **1.** Αν $\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell$, και ν = ακέραιος, τότε $\lim_{x\to x_0}[f(x)]^\nu=\ell^\nu$.

2. $(\frac{1}{x})'=-\frac{1}{x^2}$.

3. c = πραγματικός αριθμός, $\int_\alpha^\beta c dx=c(\beta-\alpha)$.

4. Αν σε ένα διάστημα (α, β) που περιέχει ένα x_0, και ισχύει $f(x)\ge f(x_0)$, τότε η f έχει στο x_0 τοπικό *ελάχιστο.*

5. Η παράγουσα της $\frac{g'(x)}{g(x)}$, όπου g(x) > 0, είναι η $\ln[g(x)]+c$.

ΘΕΜΑ Β

Αριθμός βιβλίων x_i	Συχνότητα v_i	Σχετική συχνότητα $f_i\%$	Αθροιστική σχετική συχνότητα $F_i\%$	Αθροιστική συχνότητα N_i	$x_i \cdot v_i$	$(\bar{x}-x_i)^2$	$v_i(\bar{x}-x_i)^2$
0	5	10	10	***5***	0	25	125
2	10	***20***	30	15	20	9	90
4	5	10	40	20	***20***	1	5
6	15	30	***70***	35	90	1	15
8	***15***	30	100	50	120	9	135
ΣΥΝΟΛΑ	50	100			250		370

Β1. $f_5\% = F_5\% - F_4\% = 100\% - 70\% = 30\%$

$$v = \frac{v_5}{f_5} = \frac{15}{0,3} = \frac{150}{3} = 50$$

$$f_1 = \frac{v_1}{v} = \frac{5}{50} = \frac{10}{100} = 0,1 \text{ ή } 10\%$$

$$v_2 = f_2 \cdot v = 0,20 \cdot 50 = 10$$

$$v_3 = \frac{x_3 \cdot v_3}{x_3} = \frac{20}{4} = 5$$

$$f_3 = \frac{v_3}{v} = \frac{5}{50} = 0,1 \text{ ή } 10\%$$

$$N_4 = N_5 - v_5 = 50 - 15 = 35$$

$$v_4 = N_4 - N_3 = 35 - 20 = 15$$

$$f_4 = \frac{v_4}{v} = \frac{15}{50} = \frac{30}{100} = 0,3$$

Β2. $\bar{x} = \frac{250}{50} = 5$.

Β3. Το πλήθος είναι 50 (άρτιος). Άρα υπάρχουν 2 μεσαίες παρατηρήσεις ($25^η$ και $26^η$). Από τη στήλη της αθροιστικής συχνότητας αυτές αντιστοιχούν στην τιμή μεταβλητής x_4. Άρα $\delta = \frac{6+6}{2} = 6$.

Β4. $s^2 = \frac{370}{50} = \frac{740}{100} = 7,4$.

Β5. $\bar{x}' = \dfrac{250+50\cdot 2}{50} = \dfrac{350}{50} = 7$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Από τους περιορισμούς των κλάδων της συνάρτησης $x \in (0,+\infty)$.

Γ2. $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{-x^2+6x-8}{2-\sqrt{x+2}} = \ldots = \dfrac{0}{0}$ (Απροσδιόριστη Μορφή)

$-x^2+6x-8 = -(x-2)(x-4)$, αφού η εξίσωση $-x^2+6x-8=0$ έχει ρίζες τις $x_1=2$ και $x_2=4$.

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{-x^2+6x-8}{2-\sqrt{x+2}} = \lim_{x\to 2^+} \frac{-(x-2)(x-4)(2+\sqrt{x+2})}{(2-\sqrt{x+2})(2+\sqrt{x+2})} =$$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{-(x-2)(x-4)(2+\sqrt{x+2})}{4-(x+2)} = \lim_{x\to 2^+} \frac{-(x-2)(x-4)(2+\sqrt{x+2})}{4-x-2} =$$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{-(x-2)(x-4)(2+\sqrt{x+2})}{2-x} = \lim_{x\to 2^+} \frac{-(x-2)(x-4)(2+\sqrt{x+2})}{-(x-2)} =$$

$$\lim_{x\to 2^+} \left[(x-4)(2+\sqrt{x+2})\right] = (2-4)(2+\sqrt{4}) = (-2)\cdot 4 = -8$$

Γ3. $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \left[\lambda \cdot \dfrac{x^2+4}{x+2} \cdot e^{x-2}\right] = \lambda \cdot \dfrac{2^2+4}{2+2} \cdot e^0 = 2\lambda$.

Γ4. Για να υπάρχει το όριο στο $x = 2$ θα πρέπει να ισχύει: $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$.

Συνεπώς θα έχουμε $2\lambda = -8 \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{-8}{2} \Leftrightarrow \lambda = -4$

Γ5. Για να είναι συνεχής η συνάρτηση στο x=2 θα πρέπει να ισχύει:

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = f(2)$.

$f(2) = \kappa^3$

Άρα $\kappa^3 = -8 \Leftrightarrow \kappa = -\sqrt[3]{8} \Leftrightarrow \kappa = -2$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Από θεώρημα Fermat έχουμε ότι $f'(1)=0$

$$f'(x)=\frac{(\alpha+\ln x)'\cdot x^2-(\alpha+\ln x)\cdot(x)'}{x^2}=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-(\alpha+\ln x)\cdot 1}{x^2}=$$

$$=\frac{1-\alpha-\ln x}{x^2}$$

$$f'(1)=0\Leftrightarrow 1-\alpha-\ln 1=0\Leftrightarrow 1-\alpha=0\Leftrightarrow \alpha=1$$

Δ2. $f'(x)=0\Leftrightarrow \frac{1-1-\ln x}{x^2}=0\Leftrightarrow \frac{-\ln x}{x^2}=0\Leftrightarrow \ln x=0\Leftrightarrow \ln x=\ln 1\Leftrightarrow x=1$

$f'(x)>0\Leftrightarrow \frac{-\ln x}{x^2}>0\Leftrightarrow -\ln x>0\Leftrightarrow \ln x<0\Leftrightarrow \ln x<\ln 1\Leftrightarrow x<1$

x	0		1		$+\infty$
f ‘(x)		+	0	-	
f(x)		↗		↘	
			Τ.Μ.		

Η f ↑ στο $(0,1]$ και η f ↓ στο $[1,+\infty)$

Δ3. Η f παρουσιάζει στο $x=1$ Τ.Μ. (που είναι και Ολικό). Άρα από τον ορισμό του Τοπικού Μεγίστου ισχύει: $f(x)\le f(1)\Leftrightarrow f(x)\le\frac{1+\ln 1}{1}\Leftrightarrow f(x)\le 1$.

Δ4. $E=\int_1^e |g(x)|dx$

$g(x)=x\cdot f(x)-1\Leftrightarrow g(x)=x\cdot\frac{1+\ln x}{x}-1\Leftrightarrow g(x)=1+\ln x-1\Leftrightarrow g(x)=\ln x$

$g(x)>0\Leftrightarrow \ln x>0\Leftrightarrow x>1$. Άρα στο [1, e] η $g(x)>0$.

$$E=\int_1^e |g(x)|dx=\int_1^e \ln x dx=\int_1^e 1\cdot\ln x dx=\int_1^e (x)'\cdot\ln x dx=$$

$$=[x\cdot\ln x]_1^e-\int_1^e x\cdot(\ln x)'dx=e\cdot\ln e-1\cdot\ln 1-\int_1^e x\cdot\frac{1}{x}dx=$$

$$=e\cdot 1-1\cdot 0-\int_1^e 1dx=e-(e-1)=e-e+1=1 \text{ τ.μ.}$$