ΤΑΞΗ: **Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

ΜΑΘΗΜΑ: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ / ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

Ημερομηνία: Κυριακή 4 Μαΐου 2014

Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α.1. Σχολικό βιβλίο σελ. 83.

Α.2. Σχολικό βιβλίο σελ. 41.

Α.3.
- **i.** Σωστό
- **ii.** Σωστό
- **iii.** Σωστό
- **iv.** Λάθος
- **v.** Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β.1. Είναι $|\vec{\alpha}| = 4$ και $2|\vec{\beta}| = 4 \Leftrightarrow |\vec{\beta}| = 2$, οπότε

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = |\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right) = 4\cdot 2\cdot \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} = 4\cdot 2\cdot\frac{1}{2} = 4$$

Β.2.

$$\vec{\alpha}\perp\vec{\gamma} \Leftrightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma} = 0 \Leftrightarrow \vec{\alpha}\cdot\left(\vec{\alpha}+\kappa\vec{\beta}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \vec{\alpha}^2 + \kappa\vec{\alpha}\vec{\beta} = 0 \Leftrightarrow |\vec{\alpha}|^2 + \kappa\cdot 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\kappa + 16 = 0 \Leftrightarrow \kappa = -4$$

Β.3. **i.** Είναι $\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\beta},\vec{\gamma}}\right) = \dfrac{\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}}{|\vec{\beta}||\vec{\gamma}|}$ και αφού

- $\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma} = \vec{\beta}\cdot\left(\vec{\alpha}-4\vec{\beta}\right) = \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} - 4\vec{\beta}^2 = 4 - 4|\vec{\beta}|^2 = 4 - 4\cdot 2^2 = -12$
- και

$$|\vec{\gamma}|^2 = |\vec{\alpha} - 4\vec{\beta}|^2 = (\vec{\alpha} - 4\vec{\beta})^2 = \vec{\alpha}^2 - 8\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + 16\vec{\beta}^2 = |\vec{\alpha}|^2 - 8\cdot 4 + 16|\vec{\beta}|^2$$
$$= 4^2 - 32 + 16\cdot 2^2 = 48$$

θα είναι $|\vec{\gamma}| = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$ (αφού $|\vec{\gamma}| \geq 0$)

Άρα $\text{συν}(\widehat{\vec{\beta},\vec{\gamma}}) = \dfrac{-12}{2\cdot 4\sqrt{3}} = -\dfrac{3}{2\sqrt{3}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Είναι $0 \leq (\widehat{\vec{\beta},\vec{\gamma}}) \leq \pi$, οπότε $(\widehat{\vec{\beta},\vec{\gamma}}) = \pi - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{5\pi}{6}$.

ii. Αφού $\text{προβ}_{\vec{\beta}}\vec{\gamma} \parallel \vec{\beta}$ θα υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε $\text{προβ}_{\vec{\beta}}\vec{\gamma} = \lambda\vec{\beta}$.

Οπότε

$$\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma} = \vec{\beta}\cdot\text{προβ}_{\vec{\beta}}\vec{\gamma} \Leftrightarrow \vec{\beta}\cdot(\vec{\alpha} - 4\vec{\beta}) = \vec{\beta}\cdot(\lambda\vec{\beta}) \Leftrightarrow$$
$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} - 4\vec{\beta}^2 = \lambda\vec{\beta}^2 \Leftrightarrow 4 - 4\cdot 2^2 = 2^2\lambda \Leftrightarrow$$
$$4\lambda = -12 \Leftrightarrow \lambda = -3$$

Δηλαδή $\text{προβ}_{\vec{\beta}}\vec{\gamma} = -3\cdot\vec{\beta}$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ.1. Έχουμε

$$x^2 - y^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 - y^2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$(x-1)^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow (x - 1 - y)(x - 1 + y) = 0 \Leftrightarrow$$
$$x - 1 - y = 0 \text{ ή } x - 1 + y = 0 \Leftrightarrow$$
$$y = x - 1 \text{ ή } y = -x + 1$$

Οπότε η (1) παριστάνει τις ευθείες $\varepsilon_1 : y = x - 1$ και $\varepsilon_2 : y = -x + 1$, με κλίσεις αντίστοιχα $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = -1$. Αφού $\lambda_1\lambda_2 = 1\cdot(-1) = -1$ θα είναι $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$.

Λύνουμε το σύστημα $(\Sigma)\begin{cases} y = x - 1 \\ y = -x + 1 \end{cases}$.

Με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει ότι $2y = 0 \Leftrightarrow y = 0$, οπότε το (Σ) ισοδύναμα γράφεται

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 0 = x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

Άρα το σημείο τομής των ευθειών είναι το Ε(1,0).

Γ.2 **(Α΄ τρόπος)**

Η εξίσωση $\left(2\lambda^2-3\lambda+1\right)x+\left(\lambda^2+1\right)y-3\lambda^2+6\lambda-1=0$, με $\lambda\in\mathbb{R}$ είναι της μορφής $Ax+By+\Gamma=0$ με $B=\lambda^2+1\neq 0$, οπότε παριστάνει ευθεία για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

Αν $\varepsilon_\lambda:\left(2\lambda^2-3\lambda+1\right)x+\left(\lambda^2+1\right)y-3\lambda^2+6\lambda-1=0$, τότε

- Για $\lambda=0$ η παραπάνω εξίσωση γίνεται $\varepsilon_3: x+y-1=0$
- Για $\lambda=1$ η παραπάνω εξίσωση γίνεται $\varepsilon_4: 2y+2=0\Leftrightarrow y=-1$.

Οπότε έχουμε $\begin{cases} y=-1 \\ x+y-1=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$.

Δηλαδή οι ευθείες ε_3 και ε_4 έχουν κοινό σημείο το Z(2,-1).

Όμως για $x=2$ και $y=-1$ η (2) γίνεται.

$$\left(2\lambda^2-3\lambda+1\right)\cdot 2+\left(\lambda^2+1\right)\cdot(-1)-3\lambda^2+6\lambda-1=4\lambda^2-6\lambda+2-\lambda^2-1-3\lambda^2+6\lambda-1=0$$

Άρα το $Z\in\varepsilon_\lambda$.

Επομένως όλες οι ευθείες της παραπάνω οικογένειας θα διέρχονται από το σημείο Z(2,-1).

(Β΄ τρόπος)

Από την $\left(2\lambda^2-3\lambda+1\right)x+\left(\lambda^2+1\right)y-3\lambda^2+6\lambda-1=0$, με $\lambda\in\mathbb{R}$, έχουμε

$$2\lambda^2x-3\lambda x+x+\lambda^2y+y-3\lambda^2+6\lambda-1=0\Leftrightarrow$$
$$\lambda^2\left(2x+y-3\right)+\lambda\left(-3x+6\right)+\left(x+y-1\right)=0$$

Για να είναι μηδενικό πολυώνυμο του λ, πρέπει

$$\begin{cases} -3x+6=0 \\ 2x+y-3=0 \\ x+y-1=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=2 \\ 2\cdot 2+y-3=0 \\ 2+y-1=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \\ y=-1 \end{cases}$$

Η λύση του συστήματος είναι το $\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$, άρα όλες οι ευθείες της παραπάνω οικογένειας διέρχονται από το $Z(2,-1)$.

Γ.3. **i.** Η ζητούμενη παραβολή είναι της μορφής $y^2=2px$. Αφού Ε(1,0) η εστία της, θα είναι $\frac{p}{2}=1\Leftrightarrow p=2$, οπότε η παραβολή θα είναι η $c: y^2=4x$.

Η διευθετούσα της είναι η $\delta: x=-\frac{p}{2}$, δηλαδή $\delta: x=-1$.

ii. Αν $A\left(x_1,y_1\right)$ και $B\left(x_2,y_2\right)$ τα άκρα της χορδής της c με μέσο το σημείο Z, τότε

- $y_1^2 = 4x_1$ και
- $y_2^2 = 4x_2$.

Αφαιρώντας κατά μέλη έχουμε:

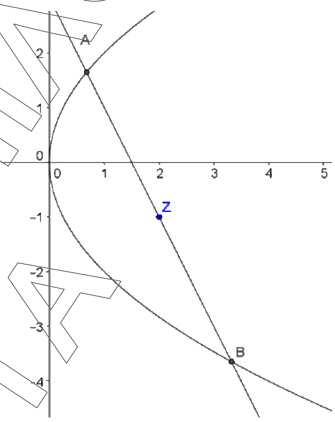
$$y_2^2 - y_1^2 = 4(x_2 - x_1) \Leftrightarrow (y_2 - y_2)(y_2 + y_1) = 4(x_2 - x_1) \qquad (3)$$

Όμως το $Z(2,-1)$ είναι μέσο του ΑΒ οπότε

$$-1 = \frac{y_2 + y_1}{2} \Leftrightarrow y_2 + y_1 = -2$$

Επομένως η (3) γίνεται

$$(y_2 - y_1)(-2) = 4(x_2 - x_1)$$



Αν $x_1 = x_2$, τα σημεία Α και Β είναι συμμετρικά ως προς x΄x, οπότε το Z, που είναι μέσο του ΑΒ, θα βρίσκεται στον x΄x. Αυτό είναι άτοπο, αφού η τεταγμένη του Z είναι -1, οπότε $x_1 \neq x_2$.

Επομένως

$$(y_2 - y_1)(-2) = 4(x_2 - x_1) \Leftrightarrow \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4}{-2} \Leftrightarrow \lambda_{AB} = -2,$$

όπου λ_{AB} η κλίση της ΑΒ. Αφού $Z(2,-1)$ σημείο της, έχουμε

$$AB: y + 1 = -2(x - 2) \Leftrightarrow y = -2x + 3$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ.1. Είναι $N(6\mu - 2, 6\lambda)$, με $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$

Αν $N(x,y)$ τότε $\begin{cases} x = 6\mu - 2 \\ y = 6\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6\mu = x + 2 \\ 6\lambda = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 36\mu^2 = (x+2)^2 \\ 36\lambda^2 = y^2 \end{cases}$

Προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτει ότι

$$36\mu^2 + 36\lambda^2 = (x+2)^2 + y^2 \Leftrightarrow (x+2)^2 + y^2 = 36(\mu^2 + \lambda^2)$$

και αφού $\mu^2 + \lambda^2 = 1$, η παραπάνω γίνεται $(x+2)^2 + y^2 = 36$.

Δ.2. **(Α΄ τρόπος)**

Παρατηρούμε ότι η ευθεία $\varepsilon_1 : x = 4$ εφάπτεται στον κύκλο c, διότι

$$d(K, \varepsilon_1) = \frac{|-2 + 0 - 4|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = 6 = \rho$$

Επίσης από το Δ διέρχονται και άπειρες ευθείες της μορφής

$$\varepsilon : y - 8 = \lambda(x - 4) \Leftrightarrow \lambda x - y + 8 - 4\lambda = 0$$

Για να εφάπτεται στον κύκλο θα πρέπει

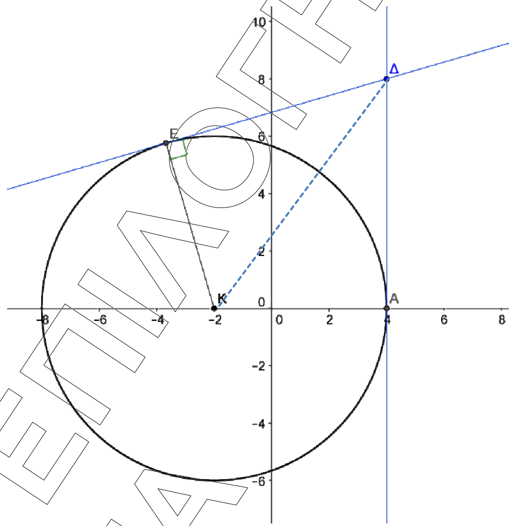
$$d(K,\varepsilon)=6 \Leftrightarrow \frac{|-2\lambda+8-4\lambda|}{\sqrt{\lambda^2+(-1)^2}}=6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6\left|\lambda-\frac{4}{3}\right|=6\sqrt{\lambda^2+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left|\lambda-\frac{4}{3}\right|^2=\left(\sqrt{\lambda^2+1}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2-\frac{8}{3}\lambda+\frac{16}{9}=\lambda^2+1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -24\lambda+16=9 \Leftrightarrow \lambda=\frac{7}{24}$$



Άρα $\varepsilon: \frac{7}{24}x-y+8-4\cdot\frac{7}{24}=0 \Leftrightarrow 7x-24y+164=0$.

(Β΄ τρόπος)

Η ζητούμενη ευθεία είναι της μορφής $\varepsilon: Ax+By+\Gamma=0$, με $A\neq 0$ ή $B\neq 0$.

Όμως $\Delta(4,8)\in\varepsilon$, οπότε $4A+8B+\Gamma=0 \Leftrightarrow \Gamma=-4A-8B$ και με αντικατάσταση στην παραπάνω προκύπτει:

$\varepsilon: Ax+By-4A-8B=0 \quad (1)$

Για να είναι εφαπτόμενη στον κύκλο c πρέπει και αρκεί

$$d(K,\varepsilon)=6 \Leftrightarrow \frac{|-2A+0B-4A-8B|}{\sqrt{A^2+B^2}}=6 \Leftrightarrow$$

$$|6A+8B|=6\sqrt{A^2+B^2} \Leftrightarrow |6A+8B|^2=\left(6\sqrt{A^2+B^2}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$36A^2+96AB+64B^2=36A^2+36B^2 \Leftrightarrow$$

$$96AB+28B^2=0 \Leftrightarrow 4B(24A+7B)=0 \Leftrightarrow$$

$$B=0 \text{ ή } B=-\frac{24}{7}A$$

- Αν $B=0$ τότε είναι $A\neq 0$, διότι η (1) παριστάνει ευθεία. Οπότε από την (1) έχουμε:
  $Ax+0y-4A-8\cdot 0=0 \Leftrightarrow Ax=4A \Leftrightarrow x=4$
- Αν $B=-\frac{24}{7}A$ τότε είναι $A\neq 0$, διότι αν ήταν $A=0$ θα είχαμε και Β=0, που είναι άτοπο διότι η (1) παριστάνει ευθεία. Οπότε από (1) θα έχουμε:

$$Ax-\frac{24}{7}Ay-4A-8\cdot\left(-\frac{24}{7}\right)A=0 \Leftrightarrow x-\frac{24}{7}y-4+\frac{192}{7}=0 \Leftrightarrow$$

$$7x-24y-28+192 \Leftrightarrow 7x-24y+164$$

Άρα οι ζητούμενες ευθείες είναι οι:
$\varepsilon_1 : x=4$ και $\varepsilon_2 : 7x-24y+164=0$

Δ.3. Παρατηρούμε ότι τα τρίγωνα ΔΚΑ και ΔΚΕ είναι ίσα, διότι

- Ορθογώνια τρίγωνα ($\hat{E}=\hat{A}=90^{o}$)
- ΔΚ κοινή πλευρά (υποτείνουσα)
- ΚΑ=ΚΕ=ρ

Οπότε $(\Delta KA)=(\Delta KE)$. Έτσι

$$(\Delta EKA)=2(\Delta KA)=2\cdot\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 8=48\tau.\mu.$$

Δ.4. Αν (M,ρ_1) κύκλος που εφάπτεται εσωτερικά στον κύκλο c και διέρχεται από το σημείο $\Sigma(2,0)$, πρέπει και αρκεί

$(KM)=(KN)-(MN)=\rho-\rho_1,\ (\rho_1<\rho)$

και $(M\Sigma)=\rho_1$

Δηλαδή έχουμε

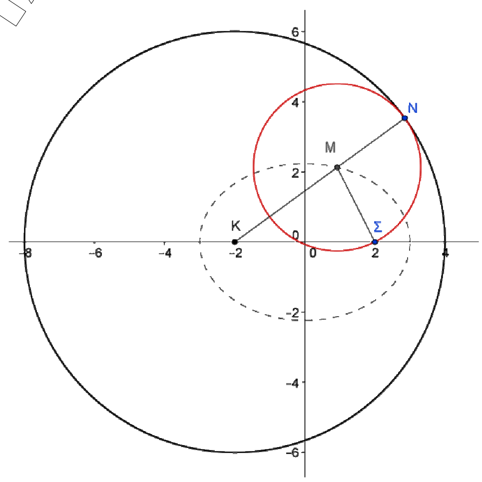
$(KM)=\rho-(M\Sigma) \Leftrightarrow (M\Sigma)+(MK)=\rho=6$

Αφού $(K\Sigma)=4<6=(MK)+(M\Sigma)$ ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ είναι η έλλειψη με εστίες Σ και Κ και μεγάλο άξονα 6.

Επομένως $\gamma=2$, $\alpha=3$ και

$\beta=\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}=\sqrt{5}$.

Και η εξίσωσή της είναι:



$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$$