

**ΤΑΞΗ: Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**  
**ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ / ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

**Ημερομηνία: Κυριακή 21 Απριλίου 2013**

**Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες**

**ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ**

**ΘΕΜΑ Α**

**A.1.** Έστω  $\vec{\alpha}, \vec{\nu}$  δύο διανύσματα του επιπέδου με  $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ . Αν  $\text{προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{\nu}$  είναι η προβολή του  $\vec{\nu}$  πάνω στο  $\vec{\alpha}$ , να αποδείξετε ότι:  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\nu} = \vec{\alpha} \cdot \text{προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{\nu}$ .

*Μονάδες 7*

**A.2.** Να δώσετε τον ορισμό της έλλειψης.

*Μονάδες 4*

**A.3.** Πως ορίζεται ο συντελεστής διεύθυνσης ενός διανύσματος  $\vec{\alpha}$  με  $\vec{\alpha} \parallel \gamma' \gamma$ ;

*Μονάδες 4*

**A.4.** Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ):

**i.** Όλες οι ευθείες που διέρχονται από το σημείο  $A(x_0, y_0)$  είναι της μορφής  $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$ , όπου  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**ii.** Αν  $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \neq \vec{0}$  και  $|\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$ , τότε  $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}$ .

**iii.** Η εκκεντρότητα της έλλειψης (C):  $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ , όπου  $\alpha > \beta > 0$  είναι

πάντοτε ίση με  $\frac{\beta}{\alpha}$ .

**iv.** Αν  $A(x_1, y_1)$  είναι σημείο του κύκλου  $C: x^2 + y^2 = \rho^2$ , όπου  $0 < \rho \neq 1$  τότε η εφαπτομένη του C στο A έχει εξίσωση:  $x x_1 + y y_1 = \rho$ .

**v.** Οι ασύμπτωτες της υπερβολής (C):  $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$  είναι οι ευθείες  $y = \pm \frac{\beta}{\alpha} x$ .

*Μονάδες 5x2=10*

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνονται τα σημεία  $A\left(1, -\frac{3}{2}\right)$ ,  $B(2, -1)$  και  $\Gamma\left(\kappa, \frac{\kappa-4}{2}\right)$ ,  $\kappa \in \mathbb{R}$ .

**B.1.** Να βρείτε τα διανύσματα  $\overline{AB}$ ,  $\overline{B\Gamma}$  και να αποδείξετε ότι τα σημεία  $A, B, \Gamma$  είναι συνευθειακά.

*Μονάδες 9*

**B.2.** Να αποδείξετε ότι η γωνία των διανυσμάτων  $\overline{AB}$  και  $\overline{BO}$  είναι αμβλεία, όπου  $O$  είναι η αρχή των αξόνων.

*Μονάδες 8*

**B.3.** Αν  $\overline{AB} \cdot \overline{A\Gamma} = 2|\overline{B\Gamma}|^2$ , να βρείτε τον αριθμό  $\kappa$  ( $\kappa \in \mathbb{R}$ ).

*Μονάδες 8*

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η εξίσωση  $\lambda^2(1-x) - \lambda y + \frac{1+x}{4} = 0$  (1), όπου  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**Γ.1.** Να αποδείξετε ότι η (1) παριστάνει ευθείες, για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

*Μονάδες 5*

**Γ.2.** Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει σημείο από το οποίο να διέρχονται όλες οι ευθείες της μορφής (1).

*Μονάδες 8*

**Γ.3.** Αν  $(\varepsilon_1)$ ,  $(\varepsilon_2)$  είναι οι ευθείες που προκύπτουν από την (1) για  $\lambda = 1$  και  $\lambda = -1$  αντίστοιχα, να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου που σχηματίζουν οι  $(\varepsilon_1)$ ,  $(\varepsilon_2)$  με τον άξονα  $y'y$ .

*Μονάδες 6*

**Γ.4.** Να βρείτε το σημείο της  $(\varepsilon_1)$ , το οποίο απέχει από την αρχή των αξόνων τη μικρότερη απόσταση.

*Μονάδες 6*

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται η εξίσωση:  $2x^2 + 2y^2 + (2\lambda - 4)x + (2\lambda + 4)y + \lambda^2 = 0$  (1), όπου  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**Δ.1.** Να αποδείξετε ότι για τις διάφορες πραγματικές τιμές του  $\lambda$  η εξίσωση (1) παριστάνει ίσους κύκλους.

*Μονάδες 4*

**Δ.2.** Να αποδείξετε ότι τα κέντρα των παραπάνω κύκλων είναι σημεία της ευθείας (ε) με εξίσωση:  $x - y - 2 = 0$ .

*Μονάδες 4*

**Δ.3.** Να αποδείξετε ότι, όλοι οι κύκλοι της μορφής (1) εφάπτονται δύο ευθειών  $(\delta_1), (\delta_2)$  των οποίων να βρείτε τις εξισώσεις.

*Μονάδες 9*

**Δ.4.** Έστω η παραβολή (C):  $x^2 = 2py$  και η ευθεία (ε) του ερωτήματος Δ.2. Αν η (ε) είναι εφαπτομένη της παραβολής, να βρείτε:

i. την παράμετρο  $p$ , την εστία και τη διευθετούσα της παραβολής.

*Μονάδες 4*

ii. την εφαπτομένη (η) της παραβολής, η οποία είναι κάθετη στην (ε).

*Μονάδες 4*

**Σας ευχόμαστε επιτυχία**