



## Γ' ΤΑΞΗ ΓΕΝ. ΛΥΚΕΙΟΥ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

### ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

#### ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

#### ΘΕΜΑ Α

**A1.** Για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα  $A$  και  $A'$  ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  να αποδειχθεί ότι :  $P(A') = 1 - P(A)$ .

**Μονάδες 8**

**A2.** Αν  $x_1, x_2, \dots, x_k$  είναι οι τιμές μιας μεταβλητής  $X$  ενός δείγματος μεγέθους  $n$ ,  $k \leq n$  με αντίστοιχες συχνοτήτες  $v_1, v_2, \dots, v_k$  και  $\alpha_i$  όπου  $i=1,2,\dots,k$  το αντίστοιχο τόξο ενός κυκλικού τμήματος στο κυκλικό διάγραμμα συχνοτήτων τότε :

- i. Να αναφέρετε για ποιά δεδομένα χρησιμοποιείται το κυκλικό διάγραμμα.
- ii. Με τι ισούται το τόξο  $\alpha_i$ ;

**Μονάδες 4**

**A3.** Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της.

**Μονάδες 3**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

**α.** Αν για μια συνάρτηση  $f$  ισχύουν  $f'(x_0) = 0$  για  $x_0 \in (\alpha, \beta)$ ,  $f'(x) > 0$  στο  $(\alpha, x_0)$  και  $f'(x) < 0$  στο  $(x_0, \beta)$ , τότε η  $f$  παρουσιάζει στο διάστημα  $(\alpha, \beta)$  για  $x = x_0$  μέγιστο.

**Μονάδες 2**

**β.** Η παράγωγος της συνάρτησης  $f$  στο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της εκφράζει το ρυθμό μεταβολής του  $y = f(x)$  ως προς το  $x$ , όταν  $x = x_0$ .

**Μονάδες 2**

**γ.** Στην κανονική κατανομή το 95% περίπου των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα  $(\bar{x} - 3s, \bar{x} + 3s)$ , όπου  $\bar{x}$  είναι η μέση τιμή των παρατηρήσεων και  $s$  η τυπική τους απόκλιση.

**Μονάδες 2**

δ. Σε ένα δείγμα μεγέθους  $n$  ο λόγος  $\frac{N_i}{F_i}$  είναι ίσος με  $n$ .

**Μονάδες 2**

ε. Για οποιαδήποτε ενδεχόμενα  $A$  και  $B$  ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$ , όταν  $P(A) \leq P(B)$  τότε  $A \subseteq B$ .

**Μονάδες 2**

### ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^3 - kx^2 + 4$ ,  $x \in \mathbb{R}$  και  $k \in \mathbb{R}$ . Αν  $f'(-1) = -3f'(1)$ , τότε :

**B1.** Να αποδείξετε ότι  $k=3$ .

**Μονάδες 6**

**B2.** Να μελετήσετε την  $f$  ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα της.

**Μονάδες 7**

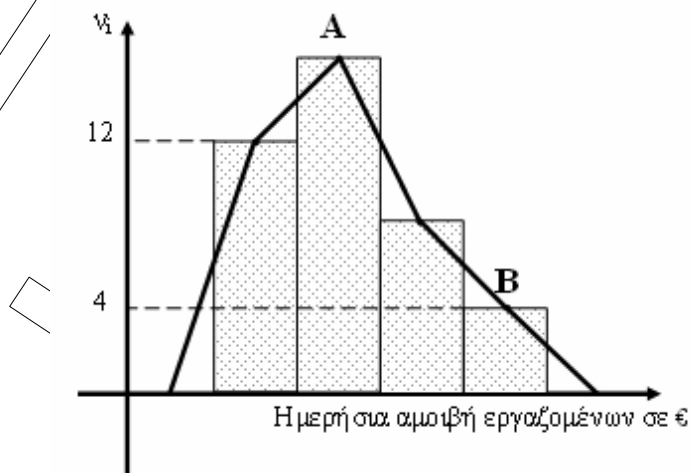
**B3.** Να βρείτε το όριο  $L = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - 4}{h}$  και την εξίσωση της εφαπτομένης της συνάρτησης  $f$  στο σημείο  $(3, f(3))$ .

**Μονάδες 7**

**B4.** Να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης της  $f$ , στην τετμημένη του οποίου ο ρυθμός μεταβολής του  $y=f(x)$  ως προς  $x$ , έχει την ελάχιστη τιμή.

**Μονάδες 5**

### ΘΕΜΑ Γ



Στο παραπάνω σχήμα δίνεται το ιστόγραμμα συχνοτήτων σε ευρώ (€) και το πολύγωνο συχνοτήτων της ημερήσιας αμοιβής 40 εργαζομένων μιας επιχείρησης. Τα δεδομένα έχουν ομαδοποιηθεί σε 4 κλάσεις ίσου πλάτους. Η τετμημένη του σημείου A είναι 35, του σημείου B είναι 55 και η μέση ημερήσια αμοιβή των εργαζομένων είναι  $\bar{x} = 36$ €.

**Γ1.** Να δείξετε ότι το πλάτος των κλάσεων είναι  $c = 10$  και να γράψετε τις κλάσεις.

**Μονάδες 5**

**Γ2.** Να δείξετε ότι οι συχνότητες  $v_2, v_3$  της δεύτερης και της τρίτης κλάσης αντίστοιχα είναι  $v_2 = 16, v_3 = 8$ .

**Μονάδες 6**

**Γ3.** Να κάνετε τον πίνακα κατανομής συχνοτήτων, σχετικών συχνοτήτων, σχετικών αθροιστικών συχνοτήτων της ημερήσιας αμοιβής των εργαζομένων της επιχείρησης, το πολύγωνο σχετικών αθροιστικών συχνοτήτων και να εκτιμήσετε τη διάμεσο.

**Μονάδες 9**

**Γ4.** Έστω  $\Omega$  ο δειγματικός χώρος των εργαζομένων της επιχείρησης και A, B δύο ενδεχόμενα του  $\Omega$  τέτοια ώστε  $P(A') \leq 0,25$  και  $P(B') \leq 0,65$ .

Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{P(A - B) + P(B - A)}{2} \geq 0,55 - P(A \cap B)$$

**Μονάδες 5**

### **ΘΕΜΑ Δ**

Έστω X μια ποσοτική μεταβλητή ως προς την οποία εξετάζουμε ένα δείγμα μεγέθους  $n$  και  $x_1, x_2, \dots, x_n$  οι παρατηρήσεις που έχουν μέση τιμή  $\bar{x}$ , τυπική απόκλιση  $s$ , συντελεστή μεταβλητότητας  $CV = 25\%$  και διάμεσο  $d$ .

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f(x) = 4x^3 - (\bar{x} + 2s)x^2 + \left(\frac{503}{CV} + s\right)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Αν η  $f$  στο σημείο με τετμημένη  $x_0 = 1$  έχει εφαπτόμενη παράλληλη στον άξονα  $x'x$  τότε :

**Δ1.** Να δείξετε ότι  $\bar{x} = 4, s = 1$  και να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τα ακρότατα.

**Μονάδες 7**

**Δ2.** Να βρείτε τον μικρότερο θετικό αριθμό  $c$  κατά τον οποίο πρέπει να αυξηθούν οι τιμές των παρατηρήσεων ώστε το δείγμα να είναι ομοιογενές.

**Μονάδες 5**

**Δ3.** Υποθέτουμε ότι η παραπάνω κατανομή είναι κανονική ή περίπου κανονική. Θεωρούμε δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  με πιθανότητες

$$P(A) = \frac{2s}{\bar{x}} \text{ και } P(B) = \frac{1}{2\delta - 5s}.$$

i. Αν  $P(A \cap B) \cdot P(A \cup B) = \frac{1}{9}$  να βρείτε τις πιθανότητες:

$$P(A \cap B), P(A \cup B) \text{ και } P(A \cup B').$$

**Μονάδες 9**

ii. Αν το πλήθος των παρατηρήσεων  $x_i$ , με  $x_i \leq 2$  είναι 5 τότε να βρείτε το μέγεθος του δείγματος.

**Μονάδες 4**