



ΕΠΑ.Λ. Α' ΟΜΑΔΑΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Θεωρία. Σελίδα 81 σχολικού βιβλίου.

- A2.** α) Σωστό.
β) Λάθος.
γ) Λάθος.
δ) Λάθος.

- A3.** α) $F(x) = x + c$
β) $F(x) = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$
γ) $F(x) = \eta\mu x + c$
δ) $F(x) = \epsilon\phi x + c$

ΘΕΜΑ Β

B1. Έχω

$$\bar{x} = \frac{x_1 \cdot v_1 + x_2 \cdot v_2 + x_3 \cdot v_3 + x_4 \cdot v_4 + x_5 \cdot v_5}{v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5} \Leftrightarrow 1 = \frac{(-1) \cdot 8 + 0 \cdot 12 + 1 \cdot 10 + 2v_4 + 3 \cdot 8}{8 + 12 + 10 + v_4 + 8} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 = \frac{26 + 2v_4}{38 + v_4} \Leftrightarrow 26 + 2v_4 = 38 + v_4 \Leftrightarrow v_4 = 12$$

B2.

x_i	v_i	Σχετική συχνότητα f_i	Σχετική συχνότητα $f_i\%$	Αθροιστική συχνότητα	Αθροιστική σχετική συχνότητα F_i	Αθροιστική σχετική συχνότητα $F_i\%$
-1	8	0,16	16	8	0,16	16
0	12	0,24	24	20	0,40	40
1	10	0,20	20	30	0,60	60
2	12	0,24	24	42	0,84	84
3	8	0,16	16	50	1	100
Σύνολο	50	1	100			

B3. Επειδή οι τιμές $x_2 = 0$ και $x_4 = 2$ εμφανίζονται με την μεγαλύτερη συχνότητα ($\nu = 12$) υπάρχουν δύο επικρατούσες τιμές, οι 0°C και 2°C . Επειδή το πλήθος των παρατηρήσεων είναι άρτιο ($\nu = 50$) η διάμεσος είναι $\delta = \frac{\text{άθροισμα μεσαίων παρατηρήσεων}}{2} = \frac{1+1}{2} = 1^\circ\text{C}$.

B4. Η θερμοκρασία ήταν το πολύ 0°C για $\nu_1 + \nu_2 = 8 + 12 = 20$ ημέρες. Το ποσοστό των ημερών με θερμοκρασία τουλάχιστον 2°C είναι $f_3\% + f_4\% = 24 + 16 = 40\%$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Αφού η f συνεχής στο \mathbb{R} θα είναι και στο $x_0 = 1$.

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 - 5x + \lambda) = 1 - 5 + \lambda = \lambda - 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x + \sqrt{x}) = 1 + 1 = 2$$

$$f(1) = 1 - 5 + \lambda = \lambda - 4$$

$$\text{Άρα } \lambda - 4 = 2 \Leftrightarrow \lambda = 6 \text{ και } f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + 6, & x \leq 1 \\ x + \sqrt{x}, & x > 1 \end{cases}$$

Γ2. Έχω $f(1) = 1 - 5 + 6 = 2$

$$\begin{aligned} \text{οπότε } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x^3 - x} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 5x + 6 - 2}{x^3 - x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 5x + 4}{x^3 - x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-4)}{x(x^2-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-4)}{x(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-4}{x(x+1)} = \frac{-3}{2}. \end{aligned}$$

Γ3. Έχω $f(9) = 9 + \sqrt{9} = 9 + 3 = 12$

$$\begin{aligned} \text{οπότε } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(9)}{\sqrt{x+2} - 1} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 5x + 6 - 12}{\sqrt{x+2} - 1} = \\ \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 5x - 6}{\sqrt{x+2} - 1} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x-6)}{\sqrt{x+2} - 1} \cdot \frac{\sqrt{x+2} + 1}{\sqrt{x+2} + 1} = \\ \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x-6)(\sqrt{x+2} + 1)}{x+2-1} &= \lim_{x \rightarrow -1} (x-6)(\sqrt{x+2} + 1) = -7 \cdot 2 = -14. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Γ4. } I &= \int_0^4 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^4 f(x) dx = \\ &= \int_0^1 (x^2 - 5x + 6) dx + \int_1^4 (x + \sqrt{x}) dx = \end{aligned}$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{5}{2}x^2 + 6x \right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \right]_1^4 =$$

$$= \left(\frac{1}{3} - \frac{5}{2} + 6 \right) - 0 + \left(\frac{16}{2} + \frac{2}{3} \cdot 4^{\frac{3}{2}} \right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \right) = \dots = 16.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Για $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$f'(x) = 3 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot \beta \cdot x + \alpha + 2 \quad \text{και} \quad f''(x) = 6 \cdot a \cdot x + 2 \cdot \beta$$

Δ2. Αφού η f παρουσιάζει ακρότατο στο $x_1 = 1$ από θεώρημα Fermat έχω ότι $f'(1) = 0$ άρα $3 \cdot a + 2 \cdot \beta + \alpha + 2 = 0 \Leftrightarrow 4 \cdot \alpha + 2 \cdot \beta + 2 = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot \alpha + \beta + 1 = 0 \quad (1)$

Ακόμη $f''(0) = 2 \Leftrightarrow 6 \cdot a \cdot 0 + 2 \cdot \beta = 2 \Leftrightarrow \beta = 1$
 οπότε η (1) δίνει $2 \cdot \alpha + 1 + 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha = -1$

Δ3. Για $\alpha = -1$ και $\beta = 1$

Έχω $f(x) = -x^3 + x^2 + x - 1$,

και $f'(x) = -3 \cdot x^2 + 2 \cdot x + 1$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -3 \cdot x^2 + 2 \cdot x + 1 = 0$

$\Delta = 4 + 12 = 16 > 0$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{-6} = \frac{-2 \pm 4}{-6}$$

$$\frac{2}{-6} = -\frac{1}{3}$$

$$\frac{-6}{-6} = 1$$

x	$-\infty$	$-1/3$	1	$+\infty$
f(x)		○	○	
f'(x)	↘	↗	↘	
		T.E.	T.M.	

Η f είναι γνήσια φθίνουσα στα διαστήματα $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right]$ και $[1, +\infty)$ και γνήσια

αύξουσα στο $\left[-\frac{1}{3}, 1\right]$.

Στο $x_1 = 1$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο με μέγιστη τιμή την

$f(1) = -1^3 + 1^2 + 1 - 1 = 0$ και στο $x_2 = -\frac{1}{3}$ τοπικό ελάχιστο με ελάχιστη τιμή

$$f\left(-\frac{1}{3}\right) = -\left(-\frac{1}{3}\right)^3 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right) - 1 = -\frac{-1}{27} + \frac{1}{9} - \frac{1}{3} - 1 = \frac{1}{27} + \frac{1}{9} - \frac{1}{3} - 1 =$$

$$= \frac{4}{27} - \frac{36}{27} = -\frac{32}{27}.$$

- Δ4.** Αφού στο $x_1 = 1$ η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο με μέγιστη τιμή την 0 και για $x > 1$ είναι γνήσια φθίνουσα, στο $[2, 3]$ θα παίρνει αρνητικές τιμές.

$$\text{Άρα } E(\Omega) = \int_2^3 f(x) dx = \int_2^3 (x^3 - x^2 - x + 1) dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x \right]_2^3 =$$

$$\left(\frac{3^4}{4} - \frac{3^3}{3} - \frac{3^2}{2} + 3 \right) - \left(\frac{2^4}{4} - \frac{2^3}{3} - \frac{2^2}{2} + 2 \right) \dots = \frac{101}{12} \text{ τ.μ..}$$