



Β' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΘΕΤΙΚΗ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

- α. I. Σχολικό βιβλίο σελ. 41.
 II. Σχολικό βιβλίο σελ. 89.
- β. Σχολικό βιβλίο σελ. 71.
- γ. Σχολικό βιβλίο σελ. 60.
- δ. Σ, Λ, Σ, Λ, Λ.

ΘΕΜΑ 2^ο

- α. $\vec{a} \perp (\vec{a} - \vec{\beta}) \Leftrightarrow \vec{a} \cdot (\vec{a} - \vec{\beta}) = 0 \Leftrightarrow \vec{a}^2 - \vec{a} \cdot \vec{\beta} = 0 \Leftrightarrow |\vec{a}|^2 = \vec{a} \cdot \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{\beta} = 2^2 = 4$
 και $(\vec{\gamma} + 3\vec{a}) \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow (\vec{\gamma} + 3\vec{a}) \cdot \vec{\beta} = 0 \Leftrightarrow \vec{\gamma} \cdot \vec{\beta} + 3\vec{a} \cdot \vec{\beta} = 0$
 $\Leftrightarrow \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} = -3\vec{a} \cdot \vec{\beta} = -3 \cdot 4 = -12$ **(I)**
- β. $|\vec{a} - \vec{\beta}|^2 = (\vec{a} - \vec{\beta})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta}^2 = |\vec{a}|^2 - 2 \cdot 4 + |\vec{\beta}|^2 =$
 $= 4 - 8 + 9 = 5 \Rightarrow |\vec{a} - \vec{\beta}| = \sqrt{5}$.
- γ. Ομοίως $(\vec{\gamma} - 2\vec{a}) = \lambda(\vec{a} - \vec{\beta}) \Leftrightarrow \vec{\gamma} - 2\vec{a} = \lambda\vec{a} - \lambda\vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\gamma} = \lambda\vec{a} + 2\vec{a} - \lambda\vec{\beta}$
 οπότε η **(I)** γράφεται:
 $\vec{\beta}(\lambda\vec{a} + 2\vec{a} - \lambda\vec{\beta}) = -12 \Leftrightarrow \lambda\vec{a} \cdot \vec{\beta} + 2\vec{a} \cdot \vec{\beta} - \lambda\vec{\beta}^2 = -12$
 $\Leftrightarrow \lambda \cdot 4 + 2 \cdot 4 - \lambda \cdot 9 = -12 \Leftrightarrow 12 + 8 = 5\lambda \Leftrightarrow \lambda = 4$.
- δ. Αφού $\lambda = 4$ τότε $\vec{\gamma} = 4\vec{a} + 2\vec{a} - 4\vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\gamma} = 6\vec{a} - 4\vec{\beta}$.
 Τότε $\vec{\gamma}(\vec{a} - \vec{\beta}) = \vec{\gamma}\vec{a} - \vec{\gamma}\vec{\beta} = (6\vec{a} - 4\vec{\beta})\vec{a} - \vec{\beta}\vec{\gamma} = 6\vec{a}^2 - 4\vec{a}\vec{\beta} - \vec{\beta}\vec{\gamma} =$
 $= 6 \cdot 2^2 - 4 \cdot 4 + 12 = 24 - 16 + 12 = 20 > 0$.

Όροι και προϋποθέσεις χρήσης επαναληπτικών θεμάτων

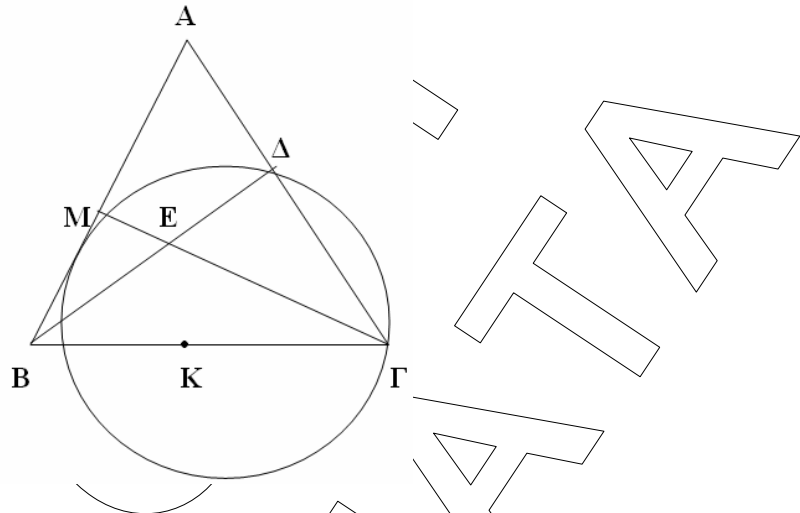
Όλα τα επαναληπτικά θέματα είναι αποκλειστικά πνευματική ιδιοκτησία της ΟΕΦΕ, βάσει του νόμου 2121/1993 και της Διεθνούς Σύμβασης της Βέρνης (που έχει κυρωθεί με το νόμο 100/1975) η οποία και μόνο θα καθορίζει ρητά και συγκεκριμένα κάθε φορά τον **τρόπο, τον χρόνο και τον τόπο** της δημοσίευσής τους.

Απαγορεύεται και διόκεται ποινικά και αστικά η χρήση, η δημοσίευση, η αναδημοσίευση, η αναπαραγωγή, ολική, μερική ή περιληπτική, ή η απόδοση κατά παράφραση ή διασκευή του περιεχομένου τους, με οποιονδήποτε τρόπο, μηχανικό, ηλεκτρονικό, φωτοτυπικό, ηχογράφησης ή άλλο, χωρίς προηγούμενη γραπτή άδεια της ΟΕΦΕ. Κατ' εξαίρεση στο διαδίκτυο και στα λοιπά ΜΜΕ επιτρέπεται να χρησιμοποιηθεί-αναρτηθεί το υλικό των Επαναληπτικών θεμάτων με τις λύσεις τους ΜΟΝΟ μετά την ανάρτησή τους από την ΟΕΦΕ στο επίσημο ιστολόγιό της, με σκοπό τη μελέτη, την ανάλυση ή την πραγματοποίηση διδασκαλίας από τον επισκέπτη, υπό την προϋπόθεση ότι τα στοιχεία που θα αντληθούν δε θα αλλοιωθούν ούτε θα χρησιμοποιηθούν παραπλανητικά, ενώ υφίσταται και η υποχρέωση, σε περίπτωση οποιασδήποτε χρήσης, να αναφέρεται ο δικαιούχος των πνευματικών δικαιωμάτων του υλικού.

$$\text{δηλ. } \cos(\vec{\gamma}, \hat{\vec{\alpha}} - \vec{\beta}) = \frac{\vec{\gamma} \cdot (\vec{\alpha} - \vec{\beta})}{|\vec{\gamma}| \cdot |\vec{\alpha} - \vec{\beta}|} > 0$$

δηλ. η γωνία των $\vec{\gamma}$, $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ είναι οξεία.

ΘΕΜΑ 3^ο



- α. Αφού $AG \perp BD$ και $\lambda_{BD} = \frac{-1}{-4} = \frac{1}{4}$ θα είναι $\lambda_{AG} = -4$ και
 $AG: y - 2 = -4(x - 1) \Leftrightarrow y - 2 = -4x + 4 \Leftrightarrow 4x + y - 6 = 0$.
 Λύνω το (Σ) των εξισώσεων $\begin{cases} AG: 4x + y - 6 = 0 \\ GM: 3x + 2y + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -6 \end{cases}$ δηλαδή $\Gamma(3, -6)$.

- β. Αν $B(x_\beta, y_\beta)$, τότε το μέσο M της AB είναι $M\left(\frac{x_\beta + 1}{2}, \frac{y_\beta + 2}{2}\right)$ και οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της ΓM δηλαδή

$$3 \frac{x_\beta + 1}{2} + 2 \frac{y_\beta + 2}{2} + 3 = 0 \Leftrightarrow 3x_\beta + 3 + 2y_\beta + 4 + 6 = 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow 3x_\beta + 2y_\beta = -13 \quad \text{(I)}$$

Όμως οι συντεταγμένες του B επαληθεύουν και την εξίσωση του BΔ δηλαδή $x_\beta - 4y_\beta - 5 = 0 \quad \text{(II)}$

$$\text{Λύνω το (Σ)} \begin{cases} x_\beta - 4y_\beta = 5 \\ 3x_\beta + 2y_\beta = -13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_\beta = -2 \\ x_\beta = -3 \end{cases} \text{ δηλαδή } B(-3, -2).$$

Τότε $M(-1, 0)$.

Όροι και προϋποθέσεις χρήσης επαναληπτικών θεμάτων

Όλα τα επαναληπτικά θέματα είναι αποκλειστικά πνευματική ιδιοκτησία της ΟΕΦΕ, βάσει του νόμου 2121/1993 και της Διεθνούς Σύμβασης της Βέρνης (που έχει κυρωθεί με το νόμο 100/1975) η οποία και μόνο θα καθορίζει ρητά και συγκεκριμένα κάθε φορά τον **τρόπο, τον χρόνο και τον τόπο** της δημοσίευσής τους.

Απαγορεύεται και διώκεται ποινικά και αστικά η χρήση, η δημοσίευση, η αναδημοσίευση, η αναπαραγωγή, ολική, μερική ή περιληπτική, ή η απόδοση κατά παράφραση ή διασκευή του περιεχομένου τους, με οποιονδήποτε τρόπο, μηχανικό, ηλεκτρονικό, φωτοτυπικό, ηχογράφησης ή άλλο, χωρίς προηγούμενη γραπτή άδεια της ΟΕΦΕ. Κατ' εξαίρεση στο διαδίκτυο και στα λοιπά ΜΜΕ επιτρέπεται να χρησιμοποιηθεί-αναρτηθεί το υλικό των Επαναληπτικών θεμάτων με τις λύσεις τους ΜΟΝΟ μετά την ανάρτησή τους από την ΟΕΦΕ στο επίσημο ιστολόγιό της, με σκοπό τη μελέτη, την ανάλυση ή την πραγματοποίηση διδασκαλίας από τον επισκέπτη, υπό την προϋπόθεση ότι τα στοιχεία που θα αντληθούν δε θα αλλοιωθούν ούτε θα χρησιμοποιηθούν παραπλανητικά, ενώ υφίσταται και η υποχρέωση, σε περίπτωση οποιασδήποτε χρήσης, να αναφέρεται ο δικαιούχος των πνευματικών δικαιωμάτων του υλικού.

γ. Για να βρω τις συντεταγμένες του Ε

$$\text{λύνω το } (\Sigma) \begin{cases} x - 4y - 5 = 0 \\ 3x + 2y + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{7} \\ y = -\frac{9}{7} \end{cases} \text{ δηλ. } E\left(-\frac{1}{7}, -\frac{9}{7}\right).$$

$$\text{Τότε } \vec{EB} = \left(-\frac{20}{7}, -\frac{5}{7}\right) \text{ και } \vec{EG} = \left(\frac{22}{7}, -\frac{33}{7}\right)$$

$$\text{Οπότε } (EBG) = \frac{1}{2} \left| \det(\vec{EB}, \vec{EG}) \right| = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} -\frac{20}{7} & -\frac{5}{7} \\ \frac{22}{7} & -\frac{33}{7} \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} \left| \frac{660}{49} + \frac{110}{49} \right| = \frac{1}{2} \cdot \frac{770}{49} = \frac{55}{7} \text{ τ.μ.}$$

δ. Είναι $A^2 + B^2 - 4\Gamma = \lambda^2 + (\lambda + 8)^2 - 4 \cdot 3 =$

$$= \lambda^2 + \lambda^2 + 16\lambda + 64 - 12 = 2\lambda^2 + 16\lambda + 52$$

που είναι τριώνυμο με $\Delta = 16^2 - 4 \cdot 2 \cdot 52 = 256 - 416 = -160 < 0$

δηλ. $2\lambda^2 + 16\lambda + 52 > 0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Άρα η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\text{με } K\left(-\frac{\lambda}{2}, \frac{-\lambda - 8}{2}\right) \text{ και } \rho = \frac{\sqrt{2\lambda^2 + 16\lambda + 52}}{2}.$$

Για να έχει διάμετρο ΒΓ, πρέπει το κέντρο του Κ να είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ και η ακτίνα να είναι ίση με το μισό του μήκους της ΒΓ ή οι συντεταγμένες των Β και Γ να επαληθεύουν την εξίσωση του κύκλου.

Το μέσο Κ του ΒΓ είναι Κ(0, -4).

$$\text{Πρέπει λοιπόν } \begin{cases} -\frac{\lambda}{2} = 0 \\ \frac{-\lambda - 8}{2} = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda = 0$$

Για $\lambda = 0$ η εξίσωση του κύκλου γράφεται (c): $x^2 + y^2 + 8y + 3 = 0$ που έχει

$$\text{ακτίνα, } \rho = \frac{\sqrt{52}}{2} = \frac{(BG)}{2}$$

αφού $(BG) = \sqrt{(-3 - 3)^2 + (-2 + 6)^2} = \sqrt{36 + 16} = \sqrt{52}$ ή διαπιστώνουμε ότι επαληθεύεται από τις συντεταγμένες των Β και Γ.

Οροι και προϋποθέσεις χρήσης επαναληπτικών θεμάτων

Όλα τα επαναληπτικά θέματα είναι αποκλειστικά πνευματική ιδιοκτησία της ΟΕΦΕ, βάσει του νόμου 2121/1993 και της Διεθνούς Σύμβασης της Βέρνης (που έχει κυρωθεί με το νόμο 100/1975) η οποία και μόνο θα καθορίζει ρητά και συγκεκριμένα κάθε φορά τον **τρόπο, τον χρόνο και τον τόπο** της δημοσίευσής τους.

Απαγορεύεται και διώκεται ποινικά και αστικά η χρήση, η δημοσίευση, η αναδημοσίευση, η αναπαραγωγή, ολική, μερική ή περιληπτική, ή η απόδοση κατά παράφραση ή διασκευή του περιεχομένου τους, με οποιονδήποτε τρόπο, μηχανικό, ηλεκτρονικό, φωτοτυπικό, ηχογράφησης ή άλλο, χωρίς προηγούμενη γραπτή άδεια της ΟΕΦΕ. Κατ' εξαίρεση στο διαδίκτυο και στα λοιπά ΜΜΕ επιτρέπεται να χρησιμοποιηθεί-αναρτηθεί το υλικό των Επαναληπτικών θεμάτων με τις λύσεις τους ΜΟΝΟ μετά την ανάρτησή τους από την ΟΕΦΕ στο επίσημο ιστολόγιό της, με σκοπό τη μελέτη, την ανάλυση ή την πραγματοποίηση διδασκαλίας από τον επισκέπτη, υπό την προϋπόθεση ότι τα στοιχεία που θα αντληθούν δε θα αλλοιωθούν ούτε θα χρησιμοποιηθούν παραπλανητικά, ενώ υφίσταται και η υποχρέωση, σε περίπτωση οποιασδήποτε χρήσης, να αναφέρεται ο δικαιούχος των πνευματικών δικαιωμάτων του υλικού.

ΘΕΜΑ 4^ο

α. α' τρόπος: Η εξίσωση (1) γράφεται:

$$\chi^2 + y^2 + 2\chi\psi + 8\chi + 8\psi + 12 = 0 \Leftrightarrow (\chi + \psi)^2 + 8(\chi + \psi) + 12 = 0,$$

$$\Delta = 64 - 48 = 16 \text{ οπότε:}$$

$$\chi + \psi = -6 \text{ ή } \chi + \psi = -2$$

$$\text{δηλ. } \chi + \psi + 6 = 0 \text{ (}\epsilon_1\text{)} \text{ ή } \chi + \psi + 2 = 0 \text{ (}\epsilon_2\text{)},$$

που είναι εξισώσεις παράλληλων ευθειών, αφού έχουν συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -1$

ή β' τρόπος: η εξίσωση (1) γράφεται:

$$\chi^2 + y^2 + 2\chi\psi + 8\chi + 8\psi + 12 = 0 \Leftrightarrow y^2 + (2\chi + 8)\psi + \chi^2 + 8\chi + 12 = 0.$$

$\Delta = (2\chi + 8)^2 - 4(\chi^2 + 8\chi + 12) = 16$ οπότε $\psi = -\chi - 4 + 2$ ή $\psi = -\chi - 4 - 2$ δηλ. $\chi + \psi + 6 = 0$ (ϵ_1) ή $\chi + \psi + 2 = 0$ (ϵ_2), που είναι εξισώσεις παράλληλων ευθειών αφού έχουν συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -1$.

β. Το κέντρο Κ του κύκλου είναι το σημείο τομής της μεσοπαράλληλης (η) των (ϵ_1) και (ϵ_2) και της (ϵ): $y = 3x$.

Η (ϵ_1) τέμνει τον $y' y$ στο $A(0, -2)$ και η (ϵ_2) τον $y' y$ στο $B(0, -6)$.

Άρα η (η) τέμνει τον $y' y$ στο μέσο $M(0, -4)$ του AB .

Δηλαδή η: $x + y + 4 = 0$

$$\text{Λύνω το } (\Sigma): \begin{cases} x + y + 4 = 0 \\ y = 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -3 \end{cases} \text{ δηλ. } K(-1, -3)$$

$$\text{και } \rho = d(K_1, \epsilon_1) = \frac{|-1 - 3 + 4|}{\sqrt{1+1}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

$$\text{Άρα } C: (x+1)^2 + (y+3)^2 = 2.$$

γ.

$$\begin{cases} x + y + 2 = 0 \\ y = 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3x = -2 \\ y = 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = -\frac{3}{2} \end{cases} \text{ δηλ. } M\left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right).$$

Άρα η ελάχιστη απόσταση του M από τον κύκλο είναι

$$|MK - \rho| = \left| \sqrt{\left(-1 + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(-3 + \frac{3}{2}\right)^2} - \sqrt{2} \right| = \left| \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{9}{4}} - \sqrt{2} \right| =$$

Οροι και προϋποθέσεις χρήσης επαναληπτικών θεμάτων

Όλα τα επαναληπτικά θέματα είναι αποκλειστικά πνευματικά ιδιοκτησία της ΟΕΦΕ, βάσει του νόμου 2121/1993 και της Διεθνούς Σύμβασης της Βέρνης (που έχει κυρωθεί με το νόμο 100/1975) η οποία και μόνο θα καθορίζει ρητά και συγκεκριμένα κάθε φορά τον **τρόπο, τον χρόνο και τον τόπο** της δημοσίευσής τους.

Απαγορεύεται και διόκεται ποινικά και αστικά η χρήση, η δημοσίευση, η αναδημοσίευση, η αναπαραγωγή, ολική, μερική ή περιληπτική, ή η απόδοση κατά παράφραση ή διασκευή του περιεχομένου τους, με οποιονδήποτε τρόπο, μηχανικό, ηλεκτρονικό, φωτοτυπικό, ηχογράφησης ή άλλο, χωρίς προηγούμενη γραπτή άδεια της ΟΕΦΕ. Κατ' εξαίρεση στο διαδίκτυο και στα λοιπά ΜΜΕ επιτρέπεται να χρησιμοποιηθεί-αναρτηθεί το υλικό των Επαναληπτικών θεμάτων με τις λύσεις τους ΜΟΝΟ μετά την ανάρτησή τους από την ΟΕΦΕ στο επίσημο ιστολόγιό της, με σκοπό τη μελέτη, την ανάλυση ή την πραγματοποίηση διδασκαλίας από τον επισκέπτη, υπό την προϋπόθεση ότι τα στοιχεία που θα αντληθούν δε θα αλλοιωθούν ούτε θα χρησιμοποιηθούν παραπλανητικά, ενώ υφίσταται και η υποχρέωση, σε περίπτωση οποιασδήποτε χρήσης, να αναφέρεται ο δικαιούχος των πνευματικών δικαιωμάτων του υλικού.

$$= \left| \sqrt{\frac{10}{4}} - \sqrt{2} \right| = \frac{\sqrt{10}}{2} - \sqrt{2} \text{ και η μέγιστη απόσταση του } M \text{ από τον κύκλο}$$

$$\text{είναι } MK + \rho = \sqrt{\left(-1 + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(-3 + \frac{3}{2}\right)^2} + \sqrt{2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{9}{4}} + \sqrt{2} =$$

$$= \sqrt{\frac{10}{4}} + \sqrt{2} = \frac{\sqrt{10}}{2} + \sqrt{2}$$

- δ. Είναι $2\gamma = 10 \cdot 2 = 20$ δηλαδή $\gamma = 10$
 και $\frac{\beta}{\alpha} = 3 \Leftrightarrow \beta = 3\alpha$. Όμως $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 \Leftrightarrow 100 = \alpha^2 + 9\alpha^2 = 10\alpha^2$
 δηλαδή $\alpha^2 = 10$ και $\beta^2 = 90$.
 Άρα $C_1: \frac{x^2}{10} - \frac{y^2}{90} = 1$

Οροι και προϋποθέσεις χρήσης επαναληπτικών θεμάτων

Όλα τα επαναληπτικά θέματα είναι αποκλειστικά πνευματική ιδιοκτησία της ΟΕΦΕ, βάσει του νόμου 2121/1993 και της Διεθνούς Σύμβασης της Βέρνης (που έχει κυρωθεί με το νόμο 100/1975) η οποία και μόνο θα καθορίζει ρητά και συγκεκριμένα κάθε φορά τον **τρόπο, τον χρόνο και τον τόπο** της δημοσίωσής τους.

Απαγορεύεται και διώκεται ποινικά και αστικά η χρήση, η δημοσίευση, η αναδημοσίευση, η αναπαραγωγή, ολική, μερική ή περιληπτική, ή η απόδοση κατά παράφραση ή διασκευή του περιεχομένου τους, με οποιονδήποτε τρόπο, μηχανικό, ηλεκτρονικό, φωτοτυπικό, ηχογράφησης ή άλλο, χωρίς προηγούμενη γραπτή άδεια της ΟΕΦΕ. Κατ' εξαίρεση στο διαδίκτυο και στα λοιπά ΜΜΕ επιτρέπεται να χρησιμοποιηθεί-αναρτηθεί το υλικό των Επαναληπτικών θεμάτων με τις λύσεις τους ΜΟΝΟ μετά την ανάρτησή τους από την ΟΕΦΕ στο επίσημο ιστολόγιό της, με σκοπό τη μελέτη, την ανάλυση ή την πραγματοποίηση διδασκαλίας από τον επισκέπτη, υπό την προϋπόθεση ότι τα στοιχεία που θα αντληθούν δε θα αλλοιωθούν ούτε θα χρησιμοποιηθούν παραπλανητικά, ενώ υφίσταται και η υποχρέωση, σε περίπτωση οποιασδήποτε χρήσης, να αναφέρεται ο δικαιούχος των πνευματικών δικαιωμάτων του υλικού.