



**Β' ΛΥΚΕΙΟΥ**  
**ΘΕΤΙΚΗ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ**  
**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

**ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ**

**ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>**

- α.** Δώστε τους ορισμούς:
- I.** Εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ .
  - II.** Παραβολή με διευθετούσα την ευθεία  $\delta$  και εστία το σημείο  $E$  εκτός της  $\delta$ .
- β.** Γράψτε τον τύπο της απόστασης του σημείου  $M(x_0, y_0)$  από την ευθεία  $\epsilon: Ax + By + \Gamma = 0$  (3x2 μονάδες)
- γ.** Αποδείξτε ότι η εξίσωση μιας ευθείας, που διέρχεται από το σημείο  $A(x_0, y_0)$  και έχει συντελεστή διεύθυνσης  $\lambda$  είναι  $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$ . (9 μονάδες)
- δ.** Σημειώστε **ΣΩΣΤΟ** ή **ΛΑΘΟΣ** για τις προτάσεις.
- I.** Η ευθεία με εξίσωση  $Ax + By + \Gamma = 0$  με  $A \neq 0$  ή  $B \neq 0$  είναι κάθετη στο διάνυσμα  $\vec{\delta} = (-A, -B)$ .
  - II.** Ο κύκλος με εξίσωση  $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$  έχει πάντοτε κέντρο  $K\left(\frac{A}{2}, \frac{B}{2}\right)$ .
  - III.** Η απόσταση της εστίας  $E$ , της παραβολής  $x^2 = 2py$ , από την διευθετούσα ευθεία  $\delta$  είναι ίση με  $|p|$ .
  - IV.** Αν  $E, E'$  σταθερά σημεία και για το μεταβλητό σημείο  $M$  ισχύει  $(ME) + (ME') = 2\alpha$ ,  $\alpha > 0$  τότε το  $M$  κινείται σε έλλειψη με εστίες  $E(\gamma, 0)$  και  $E'(-\gamma, 0)$ .
  - V.** Αν για τα μη παράλληλα στους άξονες  $x'x$  και  $y'y$  διανύσματα  $\vec{\alpha}$  και  $\vec{\beta}$  ισχύει  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$  τότε οι συντελεστές διεύθυνσής τους είναι αντίστροφοι αριθμοί. (5x2 μονάδες)

Όροι και προϋποθέσεις χρήσης επαναληπτικών θεμάτων

Όλα τα επαναληπτικά θέματα είναι αποκλειστικά πνευματική ιδιοκτησία της ΟΕΦΕ, βάσει του νόμου 2121/1993 και της Διεθνούς Σύμβασης της Βέρνης (που έχει κυρωθεί με το νόμο 100/1975) η οποία και μόνο θα καθορίζει ρητά και συγκεκριμένα κάθε φορά τον **τρόπο, τον χρόνο και τον τόπο** της δημοσίευσής τους.

Απαγορεύεται και διόκεται ποινικά και αστικά η χρήση, η δημοσίευση, η αναδημοσίευση, η αναπαραγωγή, ολική, μερική ή περιληπτική, ή η απόδοση κατά παράφραση ή διασκευή του περιεχομένου τους, με οποιονδήποτε τρόπο, μηχανικό, ηλεκτρονικό, φωτοτυπικό, ηχογράφησης ή άλλο, χωρίς προηγούμενη γραπτή άδεια της ΟΕΦΕ. Κατ' εξαίρεση στο διαδίκτυο και στα λοιπά ΜΜΕ επιτρέπεται να χρησιμοποιηθεί-αναρτηθεί το υλικό των Επαναληπτικών θεμάτων με τις λύσεις τους ΜΟΝΟ μετά την ανάρτησή τους από την ΟΕΦΕ στο επίσημο ιστολόγιό της, με σκοπό τη μελέτη, την ανάλυση ή την πραγματοποίηση διδασκαλίας από τον επισκέπτη, υπό την προϋπόθεση ότι τα στοιχεία που θα αντληθούν δε θα αλλοιωθούν ούτε θα χρησιμοποιηθούν παραπλανητικά, ενώ υφίσταται και η υποχρέωση, σε περίπτωση οποιασδήποτε χρήσης, να αναφέρεται ο δικαιούχος των πνευματικών δικαιωμάτων του υλικού.

**ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>**

Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha}$ ,  $\vec{\beta}$ ,  $\vec{\gamma}$  με  $|\vec{\alpha}|=2$ ,  $|\vec{\beta}|=3$ ,  $\vec{\alpha} \perp (\vec{\alpha} - \vec{\beta})$  και  $(\vec{\gamma}+3\vec{\alpha}) \perp \vec{\beta}$ .

- α. Να δείξετε ότι  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}=4$  και  $\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} = -12$ .  
(8 μονάδες)
- β. Να δείξετε ότι  $|\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = \sqrt{5}$ .  
(5 μονάδες)
- γ. Αν επιπλέον γνωρίζετε ότι  $\vec{\gamma} - 2\vec{\alpha} = \lambda(\vec{\alpha} - \vec{\beta})$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  να βρείτε την τιμή του  $\lambda$ .  
(6 μονάδες)
- δ. Για  $\lambda=4$  να γραφεί το διάνυσμα  $\vec{\gamma}$  σαν γραμμικός συνδυασμός των  $\vec{\alpha}$  και  $\vec{\beta}$  και να δείξετε ότι η γωνία των διανυσμάτων  $\vec{\gamma}$  και  $\vec{\alpha}-\vec{\beta}$  είναι οξεία.  
(6 μονάδες)

**ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>**

Σε τρίγωνο ΑΒΓ δίνονται η κορυφή Α(1, 2), η εξίσωση του ύψους ΒΔ:  $x-4y-5=0$  και η εξίσωση της διαμέσου ΓΜ:  $3x+2y+3=0$ .

- α. Βρείτε την εξίσωση της πλευράς ΑΓ και τις συντεταγμένες της κορυφής Γ.  
(6 μονάδες)
- β. Βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου Μ της πλευράς ΑΒ και της κορυφής Β.  
(7 μονάδες)
- γ. Αν Ε το σημείο τομής των ΓΜ και ΒΔ τότε να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΕΒΓ.  
(6 μονάδες)
- δ. Δίνεται η γραμμή (C) με εξίσωση  $x^2 + y^2 + \lambda x + (\lambda+8)y + 3 = 0$  (1). Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$  και να βρείτε την τιμή του  $\lambda$ , ώστε ο κύκλος (1) να έχει διάμετρο την πλευρά ΒΓ.  
(6 μονάδες)

**Όροι και προϋποθέσεις χρήσης επαναληπτικών θεμάτων**

Όλα τα επαναληπτικά θέματα είναι αποκλειστικά πνευματική ιδιοκτησία της ΟΕΦΕ, βάσει του νόμου 2121/1993 και της Διεθνούς Σύμβασης της Βέρνης (που έχει κυρωθεί με το νόμο 100/1975) η οποία και μόνο θα καθορίζει ρητά και συγκεκριμένα κάθε φορά τον **τρόπο, τον χρόνο και τον τόπο** της δημοσίευσής τους.

**Απαγορεύεται και διόκεται ποινικά και αστικά** η χρήση, η δημοσίευση, η αναδημοσίευση, η αναπαραγωγή, ολική, μερική ή περιληπτική, ή η απόδοση κατά παράφραση ή διασκευή του περιεχομένου τους, με οποιονδήποτε τρόπο, μηχανικό, ηλεκτρονικό, φωτοτυπικό, ηχογράφησης ή άλλο, χωρίς προηγούμενη γραπτή άδεια της ΟΕΦΕ. Κατ' εξαίρεση στο διαδίκτυο και στα λοιπά ΜΜΕ επιτρέπεται να χρησιμοποιηθεί-αναρτηθεί το υλικό των Επαναληπτικών θεμάτων με τις λύσεις τους ΜΟΝΟ μετά την ανάρτησή τους από την ΟΕΦΕ στο επίσημο ιστολόγιό της, με σκοπό τη μελέτη, την ανάλυση ή την πραγματοποίηση διδασκαλίας από τον επισκέπτη, υπό την προϋπόθεση ότι τα στοιχεία που θα αντληθούν δε θα αλλοιωθούν ούτε θα χρησιμοποιηθούν παραπλανητικά, ενώ υφίσταται και η υποχρέωση, σε περίπτωση οποιασδήποτε χρήσης, να αναφέρεται ο δικαιούχος των πνευματικών δικαιωμάτων του υλικού.

**ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>**

Δίνεται η εξίσωση  $x^2 + y^2 + 2x(y + 4) + 12 + 8y = 0$  (1).

- α. Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει δύο ευθείες ( $\epsilon_1$ ) και ( $\epsilon_2$ ) οι οποίες είναι παράλληλες.  
(7 μονάδες)
- β. Αν ( $\epsilon_1$ ):  $x+y+2=0$  και ( $\epsilon_2$ ):  $x+y+6=0$  είναι οι δύο ευθείες που παριστάνει η (1), να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C που εφάπτεται στις ευθείες ( $\epsilon_1$ ) και ( $\epsilon_2$ ) και το κέντρο του βρίσκεται στην ευθεία ( $\epsilon$ ):  $y=3x$ .  
(7 μονάδες)
- γ. Βρείτε την ελάχιστη και την μέγιστη απόσταση του σημείου τομής των ευθειών ( $\epsilon_1$ ) και ( $\epsilon$ ) από τον κύκλο C.  
(6 μονάδες)
- δ. Βρείτε την εξίσωση της υπερβολής ( $C_1$ ) με εστίες στον άξονα  $x'x$ , που έχει ασύμπτωτη την ( $\epsilon$ ):  $y=3x$  και εστιακή απόσταση  $2\gamma=10\rho^2$ , όπου  $\rho$  η ακτίνα του κύκλου C.  
(5 μονάδες)

**Όροι και προϋποθέσεις χρήσης επαναληπτικών θεμάτων**

Όλα τα επαναληπτικά θέματα είναι αποκλειστικά πνευματικά ιδιοκτησία της ΟΕΦΕ, βάσει του νόμου 2121/1993 και της Διεθνούς Σύμβασης της Βέρνης (που έχει κυρωθεί με το νόμο 100/1975) η οποία και μόνο θα καθορίζει ρητά και συγκεκριμένα κάθε φορά τον **τρόπο, τον χρόνο και τον τόπο** της δημοσίευσής τους.

**Απαγορεύεται και διώκεται ποινικά και αστικά** η χρήση, η δημοσίευση, η αναδημοσίευση, η αναπαραγωγή, ολική, μερική ή περιληπτική, ή η απόδοση κατά παράφραση ή διασκευή του περιεχομένου τους, με οποιονδήποτε τρόπο, μηχανικό, ηλεκτρονικό, φωτοτυπικό, ηχογράφησης ή άλλο, χωρίς προηγούμενη γραπτή άδεια της ΟΕΦΕ. Κατ' εξαίρεση στο διαδίκτυο και στα λοιπά ΜΜΕ επιτρέπεται να χρησιμοποιηθεί-αναρτηθεί το υλικό των Επαναληπτικών θεμάτων με τις λύσεις τους ΜΟΝΟ μετά την ανάρτησή τους από την ΟΕΦΕ στο επίσημο ιστολόγιό της, με σκοπό τη μελέτη, την ανάλυση ή την πραγματοποίηση διδασκαλίας από τον επισκέπτη, υπό την προϋπόθεση ότι τα στοιχεία που θα αντληθούν δε θα αλλοιωθούν ούτε θα χρησιμοποιηθούν παραπλανητικά, ενώ υφίσταται και η υποχρέωση, σε περίπτωση οποιασδήποτε χρήσης, να αναφέρεται ο δικαιούχος των πνευματικών δικαιωμάτων του υλικού.