



## ΕΠΑ.Λ. Β' ΟΜΑΔΑΣ

## ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ

## ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>

- A. Σχολ. Βιβλίο σελ. 260
- B. 1. Σχολ. Βιβλίο σελ. 280  
2. Σχολ. Βιβλίο σελ. 191
- Γ. 1. Σ  
2. Λ  
3. Λ  
4. Σ  
5. Λ

ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>

A.  $z + \frac{1}{z} = -1 \Leftrightarrow z^2 + 1 = -z \Leftrightarrow z^2 + z + 1 = 0$  με  $z_1 z_2 = 1$  (τύποι Vieta)

(ή  $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3$   $z_1 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$  και  $z_2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ ) και

$z_1^2 + z_1 + 1 = 0 \Rightarrow z_1^3 + z_1^2 + z_1 = 0 \Leftrightarrow z_1^3 = -(z_1^2 + z_1) = -1$  ή  $z_1^3 = \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \dots$

B. Οι αριθμοί  $z_1$  και  $z_2$  συζυγείς οπότε  $\overline{z_1^{2009}} = \overline{z_1}^{-2009} = z_2^{2009}$

Άρα  $(z_1^{2009} + z_2^{2009}) \in \mathbb{R}$  σαν άθροισμα συζυγών

Γ.  $\frac{z_1^8 + z_2^8}{z_1 z_2} + 1 = z_1^8 + z_1^{10} + 1 = (z_1^3)^2 \cdot z_1^2 + (z_1^3)^3 z_1 + 1 = z_1^2 + z_1 + 1 = 0$

Δ. Έστω  $g(x) = f(x) - 3x + 2$ , συνεχής στο  $[0, 1]$  σαν άθροισμα συνεχών ( $f$  παραγωγίσιμη οπότε και  $-3x+2$  συνεχής ως πολωνυμική με

$$g(0) = f(0) + 2 = \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1} + 2 + 2 = \frac{z_1^2 + z_2^2}{z_1 z_2} + 4 = \frac{(z_1 + z_2)^2 - 2z_1 z_2}{z_1 z_2} + 4 = \frac{(-1)^2 - 2 \cdot 1}{1} + 4 = 3 > 0$$

$$\text{και } g(1) = f(1) - 3 + 2 = \frac{1}{2z_1} + \frac{1}{2z_2} - \frac{3}{2} - 1 = \frac{2z_2 + 2z_1}{4z_1 z_2} - \frac{5}{2} = \frac{-2}{4} - \frac{5}{2} = -3 < 0$$

Άρα από το Θεώρημα Bolzano υπάρχει  $x_0 \in (0,1)$  ώστε

$$g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) - 3x_0 + 2 = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = 3x_0 - 2$$

**Ε.**  $w = 2(z_1 + z_2) = 2(-1) = -2$  δηλαδή  $\Gamma(-2,0)$ , και  $A\left(\frac{-1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ,  $B\left(\frac{-1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$  τότε

$$|\Gamma A| = \sqrt{\left(-2 + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(0 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{3}$$

$$|\Gamma B| = \sqrt{\left(-2 + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{3}$$

Άρα  $|\Gamma A| = |\Gamma B|$

### ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>

**Α.**  $f(x) = x + 2 + 2 \ln x$  με π.ο.  $D_f = (0, +\infty)$

$$f'(x) = 1 + \frac{2}{x} > 0 \Rightarrow f \uparrow (0, +\infty)$$

$$f''(x) = \frac{-2}{x^2} < 0 \Rightarrow f \text{ κοίλη στο } (0, +\infty)$$

**Β.**  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + 2 + 2 \ln x) = 0 + 2 - \infty = -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 2 + 2 \ln x) = +\infty + 2 + \infty = +\infty \text{ δηλαδή } f(A) = (-\infty, +\infty)$$

Αφού το  $0 \in f(A)$  έχει η  $f(x) = 0$  ρίζα  $x_0$  στο  $(0, +\infty)$ , μοναδική γιατί  $f \uparrow (0, +\infty)$

**Γ.** Θέλω  $g(x) \geq g(x_0)$  δηλαδή η  $g$  να έχει ελάχιστο στο  $x_0$ . Έχω

$$g'(x) = \frac{(\ln x + 1)(x + 2) - x \ln x}{(x + 2)^2} = \frac{x \ln x + 2 \ln x + x + 2 - x \ln x}{(x + 2)^2} =$$

$$= \frac{2 \ln x + x + 2}{(x + 2)^2} = \frac{f(x)}{(x + 2)^2}$$

$$\text{Αν } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{(x + 2)^2} = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$$

	$x_0$	
$x$		
$g'(x)$	-	+
$g(x)$	↘	↗
	ελα	

άρα η  $g(x)$  έχει ελάχιστο στο  $x_0$  δηλαδή  $g(x) \geq g(x_0)$

- Δ.** Θέλω  $f(x-2) < 2f(x+1) - f(x+4) \Leftrightarrow f(x+4) - f(x+1) < f(x+1) - f(x-2) \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow \frac{f(x+4) - f(x+1)}{(x+4) - (x+1)} < \frac{f(x+1) - f(x-2)}{(x+1) - (x-2)}$   
 έχω από Θ.Μ.Τ. ότι υπάρχουν  $\xi_1 \in (x+1, x+4)$  και  $\xi_2 \in (x-2, x+1)$  ώστε  
 $f'(\xi_1) = \frac{f(x+4) - f(x+1)}{(x+4) - (x+1)}$  και  $f'(\xi_2) = \frac{f(x+1) - f(x-2)}{(x+1) - (x-2)}$  δηλαδή θέλω  
 $f'(\xi_1) < f'(\xi_2)$   
 Όμως  $f$  κοίλη στο  $(0, +\infty)$  δηλαδή  $f' \downarrow (0, +\infty)$  και  $0 < x-2 < \xi_1 < x+1 < \xi_2 < x+4$   
 Θα είναι  $f'(\xi_1) > f'(\xi_2)$  δηλαδή ισχύει το ζητούμενο.

### ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>

- A.** Για κάθε  $x \in (0, +\infty)$  είναι:  
 $f'\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x+1}{e^x} \Rightarrow -\frac{1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x+1}{e^x} \left(-\frac{1}{x^2}\right) \Rightarrow \left[f\left(\frac{1}{x}\right)\right]' = \left(e^{-x} \frac{1}{x}\right)' \Rightarrow$   
 $\Rightarrow f\left(\frac{1}{x}\right) = e^{-x} \frac{1}{x} + c$   
 Για  $x = 1$  είναι  $f(1) = \frac{1}{e} + c \Rightarrow c = 0$   
 Άρα  $f\left(\frac{1}{x}\right) = e^{-x} \frac{1}{x}$   
 Έστω  $\frac{1}{x} = \omega$  τότε  $x = \frac{1}{\omega}$ ,  $\omega \in (0, +\infty)$ . Άρα  $f(\omega) = \omega e^{-1/\omega}$   
 Τελικά  $f(x) = x e^{-1/x}$ ,  $x \in (0, +\infty)$ .

**2<sup>η</sup> λύση:**

$$f'\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x+1}{e^x}, x > 0$$

$$\text{Θέτω } \frac{1}{x} = \omega \Rightarrow x = \frac{1}{\omega} > 0$$

$$\text{Άρα } f'(\omega) = \left(\frac{1}{\omega} + 1\right) e^{-1/\omega} \Rightarrow f'(\omega) = (\omega e^{-1/\omega})' \Rightarrow f(\omega) = \omega e^{-1/\omega} + c$$

$$\text{Για } x = 1 \text{ είναι } \omega = 1 \text{ άρα } f(1) = e^{-1} + c \Rightarrow c = 0$$

$$\text{Άρα } f(\omega) = \omega e^{-1/\omega}, \omega > 0 \text{ ή } f(x) = x e^{-1/x}, x > 0$$

**Β.**

$$1. \text{ Είναι } f'(x) = e^{-1/x} + xe^{-1/x} \frac{1}{x^2} = e^{-1/x} \left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

$$f'(1) = \frac{2}{e}, \quad f(1) = \frac{1}{e}$$

Η εφαπτομένη στο  $x_0 = 1$  είναι:

$$y - f(1) = f'(1)(x-1) \Rightarrow y = \frac{2}{e}x - \frac{1}{e} \quad (\varepsilon)$$

$$2. \text{ Είναι: } f''(x) = \frac{1}{x^3} e^{-1/x} > 0 \text{ για } x > 0.$$

Άρα η  $f(x)$  είναι κυρτή στο  $\in (0, +\infty)$  και η  $C_f$  βρίσκεται πάνω από την  $(\varepsilon)$  εκτός του σημείου επαφής.

$$\text{Είναι } f(x) \geq \frac{2}{e}x - \frac{1}{e} \Rightarrow f(x) - \frac{2}{e}x + \frac{1}{e} \geq 0 \text{ για κάθε } x \in [1, 2]$$

$$\text{Άρα } \int_1^2 (f(x) - \frac{2}{e}x + \frac{1}{e}) dx > 0 \Rightarrow \int_1^2 f(x) dx + \int_1^2 (-\frac{2}{e}x + \frac{1}{e}) dx > 0 \Rightarrow$$

$$\int_1^2 f(x) dx + [-\frac{2}{e}x + \frac{1}{e}]_1^2 > 0 \Rightarrow \int_1^2 f(x) dx - \frac{2}{e} > 0 \Rightarrow \int_1^2 f(x) dx > \frac{2}{e}$$

$$\Gamma. \quad g(x) = \frac{f(x)}{x^3} = \frac{e^{-1/x}}{x^2} > 0 \text{ στο } [1, t]$$

$$\text{Άρα } E = \int_1^t g(x) dx = \int_1^t \frac{1}{x^2} e^{-1/x} dx = [e^{-1/x}]_1^t = e^{-1/t} - e^{-1} \text{ τ.μ.}$$

$$\Delta. \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} E(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (e^{-1/t} - e^{-1}) = \lim_{\omega \rightarrow 0} (e^{\omega} - e^{-1}) = 1 - e^{-1}$$

(Εστω  $-\frac{1}{t} = \omega$ , όταν  $t \rightarrow +\infty$  τότε  $\omega \rightarrow 0$ )