



**Β' ΛΥΚΕΙΟΥ**  
**ΘΕΤΙΚΗ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ**  
**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

**ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ**

**ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>**

**A.** Να δείξετε ότι η εφαπτομένη του κύκλου  $C: x^2 + y^2 = \rho^2$  σε ένα σημείο του  $A(\chi_1, \psi_1)$  έχει εξίσωση  $\chi \cdot \chi_1 + \psi \cdot \psi_1 = \rho^2$ .  
 (9 μονάδες)

**B.**

**α.** Τι ονομάζουμε εσωτερικό γινόμενο δύο μη μηδενικών διανυσμάτων  $\vec{a}$  και  $\vec{b}$ .

**β.** Δώστε τον ορισμό της υπερβολής με εστίες  $E$  και  $E'$ .  
 (2.3=6 μονάδες)

**Γ.** Να χαρακτηρίσετε ως Σωστή (Σ) ή Λανθασμένη (Λ) καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις:

1. Για δύο οποιαδήποτε διανύσματα  $\vec{a}$  και  $\vec{b}$  του επιπέδου ισχύει  $(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = \vec{a}^2 \vec{b}^2$ .

2. Η ευθεία  $\varepsilon: Ax + By + \Gamma = 0$ , με  $A, B, \Gamma \in \mathbb{R}$  και  $A \cdot B > 0$  σχηματίζει αμβλεία γωνία με τον άξονα  $x$ .

3. Η παραβολή  $c: y^2 = px$  έχει εστία το σημείο  $E\left(\frac{p}{4}, 0\right)$ .

4. Αν οι ελλείψεις  $c_1: \frac{x^2}{\alpha_1^2} + \frac{y^2}{\beta_1^2} = 1$  και  $c_2: \frac{x^2}{\alpha_2^2} + \frac{y^2}{\beta_2^2} = 1$  είναι όμοιες τότε  $\alpha_1 = \alpha_2$  και  $\beta_1 = \beta_2$ .

5. Το εμβαδόν ενός τριγώνου  $AB\Gamma$  δίνεται από τον τύπο:  
 $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \det(\overline{AB}, \overline{A\Gamma})$ .

(5x2 μονάδες)

**ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>**

Σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι  $\overline{AB} = \vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$ ,  $\overline{A\Gamma} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$  με  $|\vec{\alpha}| = 2$ ,  $|\vec{\beta}| = 1$  και  $\left(\vec{\alpha}, \vec{\beta}\right) = \frac{\pi}{3}$

1. Να υπολογιστούν οι παραστάσεις

α.  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$

β.  $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}|$

γ.  $|\vec{\alpha} - \vec{\beta}|$

(9 μονάδες)

2. Έστω  $M$  μέσο του  $B\Gamma$ . Να εκφράσετε τα διανύσματα  $\overline{AM}$  και  $\overline{B\Gamma}$  σαν γραμμικό συνδυασμό των  $\vec{\alpha}$  και  $\vec{\beta}$ .

(4 μονάδες)

3. Να υπολογίσετε το συνημίτονο της γωνίας  $(\overline{AM}, \overline{B\Gamma})$ .

(5 μονάδες)

4. Να βρεθεί το μέτρο της προβολής του  $\overline{AM}$  στο  $\overline{B\Gamma}$ .

(7 μονάδες)

**ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>**

Έστω παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  με εξισώσεις διαγωνίων  $(B\Delta): y=x+1$  και  $(A\Gamma): y=2x-3$ . Η διαγώνιος  $B\Delta$  είναι η μεσοπαράλληλος των ευθειών  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ , των οποίων η μεταξύ τους απόσταση είναι  $d = 2\sqrt{2}$  και οι οποίες διέρχονται από τις κορυφές  $A$  και  $\Gamma$  αντιστοίχως. Αν  $A\Delta = (4, 6)$ , τότε:

1. Να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου  $K$  του παραλληλογράμμου  $AB\Gamma\Delta$ .

(5 μονάδες)

2. Να δείξετε ότι οι ευθείες  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  έχουν εξισώσεις  $(\varepsilon_1): x-y-1=0$  και  $(\varepsilon_2): x-y+3=0$ .

(8 μονάδες)

3. Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών  $A, B, \Gamma, \Delta$  του παραλληλογράμμου.

(8 μονάδες)

4. Να βρείτε το εμβαδόν  $(AB\Gamma\Delta)$  του παραλληλογράμμου.

(4 μονάδες)

**ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>**

Δίνεται η εξίσωση  $C : x^2 + y^2 - 2(\eta\mu\theta)x + 4(\sigma\upsilon\nu\theta)y + \eta\mu^2\theta = 0$ , (1) με  $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .

Να δείξετε ότι:

1. Η εξίσωση (1) παριστάνει για κάθε  $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο  $K(x_0, y_0)$  και την ακτίνα  $\rho$  ως συνάρτηση της γωνίας  $\theta$ .  
(6 μονάδες)
2. Τα κέντρα των κύκλων  $K(x_0, y_0)$  που προκύπτουν από την (1), ανήκουν σε έλλειψη της οποίας να βρείτε τα μήκη του μεγάλου  $A'A$  και μικρού  $B'B$  άξονα της, τις εστίες της  $E', E$  καθώς και την εκκεντρότητα της  $\epsilon$ .  
(9 μονάδες)
3. Για τις συντεταγμένες των κέντρων  $K(x_0, y_0)$  των κύκλων που προκύπτουν από την (1), ισχύουν :  $x_0 > 0, y_0 < 0$  και στην συνέχεια να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων  $K(x_0, y_0)$ .  
(4 μονάδες)
4. Η ελάχιστη και η μέγιστη απόσταση, της εστίας  $E$  (με θετική συντεταγμένη) από τυχαίο σημείο του κύκλου ο οποίος προκύπτει από την (1) για  $\theta = \frac{\pi}{3}$ , είναι  $d_1 = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$  και  $d_2 = 3 + \frac{\sqrt{3}}{2}$ , αντιστοίχως.  
(6 μονάδες)