



Β' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΑΛΓΕΒΡΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

A.1. Θεωρία σελ. 68

A.2. Θεωρία σελ. 61
Θεωρία σελ. 62

B.1. 1. Σ
2. Λ
3. Σ
4. Λ
5. Σ

B.2. Γ

B.3. Δ

B.4. Α. 3
Β. 4
Γ. 1
Δ. 2

ΘΕΜΑ 2^ο

α) Επειδή ο αριθμός 2 είναι ρίζα του πολυωνύμου έχουμε:

$$P(2) = 0 \Leftrightarrow 84\alpha - 12 + 4\beta + 2 - 2\alpha = 0 \Leftrightarrow -6\alpha + 4\beta - 2 = 0 \Leftrightarrow 3\alpha - 2\beta + 1 = 0 \quad (1)$$

Επειδή η διαίρεση του $P(x)$ με το $x+1$ αφήνει υπόλοιπο -18 έχουμε

$$P(-1) = -18 \Leftrightarrow -1 - \alpha - 3 - 2\beta - 1 - 2\alpha = -18 \Leftrightarrow -3\alpha - 2\beta + 13 = 0 \Leftrightarrow 3\alpha + 2\beta - 13 = 0 \quad (2)$$

Λύνουμε το σύστημα των (1) και (2)

$$(1)+(2) \Rightarrow 6\alpha - 12 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 2$$

$$\text{για } \alpha=2 \text{ (1)} \Rightarrow 6 - 2\beta + 1 = 0 \Leftrightarrow \beta = \frac{7}{2}$$

β) i) Για $\alpha=2$ και $\beta=\frac{7}{2}$ το πολυώνυμο γίνεται

$$P(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4$$

Με σχήμα Horner έχουμε

1	-5	8	4	2
	2	-6	4	
1	-3	2	0	

Το πολυώνυμο γράφεται

$$P(x) = (x-2)(x^2 - 3x + 2) = (x-2)(x-2)(x-1) = (x-2)^2(x-1)$$

Άρα $P(x) = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2(x-1) = 0 \Leftrightarrow x=1$ ή $x=2$ διπλή ρίζα.

ii) Η διαίρεση είναι:

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 5x^2 + 8x - 4 & x^2 + 1 \\ \hline x^3 & x - 5 \\ \hline -5x^2 + 7x - 4 & \\ 5x^2 & + 5 \\ \hline 7x - 1 & \end{array}$$

Από την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης έχουμε

$$P(x) = (x-5)(x^2+1) + 7x+1$$

γ) Η ανίσωση γίνεται:

$$P(x) \geq 7x+1 \Leftrightarrow (x-5)(x^2+1) + 7x+1 \geq 7x+1 \Leftrightarrow (x-5)(x^2+1) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$x-5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 5$$

ΘΕΜΑ 3^ο

Α. α) Η εξίσωση γίνεται

$$f(2x) + 3f(x) + 2 = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 2x + 3\sigma\upsilon\nu x + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu^2 x - 1 + 3\sigma\upsilon\nu x + 2 = 0 \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu^2 x + 3\sigma\upsilon\nu x + 1 = 0$$

Θέτω $\sigma\upsilon\nu x = \omega$ με $-1 \leq \omega \leq 1$ και η εξίσωση γίνεται

$$2\omega^2 + 3\omega + 1 = 0 \text{ που έχει ρίζες } \omega = -1 \text{ και } \omega = -\frac{1}{2} \text{ δεκτές}$$

Για $\omega = -1$ έχουμε $\sigma\upsilon\nu x = -1 \Leftrightarrow x = 2k\pi + \pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Για $\omega = -\frac{1}{2}$ έχουμε $\sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$

β) Για $x = \frac{\pi}{3}$ έχουμε $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ οπότε η δοθείσα σχέση γίνεται

$$L = \left[1 + f\left(\frac{\pi}{3}\right) + f^2\left(\frac{\pi}{3}\right) + \dots + f^{10}\left(\frac{\pi}{3}\right) \right] 2^{10} - 38 =$$

$$= \left[1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \right] 2^{10} - 38 = \Sigma_{11} \cdot 2^{10} - 38$$

όπου Σ_{11} το άθροισμα 11 πρώτων όρων γεωμετρικής προόδου με $a_1 = 1$ και λόγο $\lambda = \frac{1}{2}$

$$\text{άρα } \Sigma_{11} = a_1 \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{11} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{2^{11} - 1}{-2^{-10}} = \frac{1 - 2^{11}}{-2^{10}} = \frac{2^{11} - 1}{2^{10}} \text{ οπότε}$$

$$L = \frac{2^{11} - 1}{2^{10}} \cdot 2^{10} - 38 = 2^{11} - 39 = 2009$$

Β. α) Πρέπει $1 - 2a > 0 \Leftrightarrow a < \frac{1}{2}$.

Για να είναι γνησίως φθίνουσα η g πρέπει

$$0 < 1 - 2a < 1 \Leftrightarrow -1 < -2a < 0 \Leftrightarrow 0 < a < \frac{1}{2}$$

Επομένως για να είναι γνησίως φθίνουσα η g πρέπει $0 < a < \frac{1}{2}$

β) Για $a = -1$ η συνάρτηση γίνεται $g(x) = 3^x$ οπότε η εξίσωση γίνεται

$$g(\eta\mu^2 x) + g(\sigma\upsilon\nu^2 x) = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow 3^{\eta\mu^2 x} + 3^{\sigma\upsilon\nu^2 x} = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3^{\eta\mu^2 x} + 3^{1-\eta\mu^2 x} = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow 3^{\eta\mu^2 x} + \frac{3}{3^{\eta\mu^2 x}} = 2\sqrt{3}$$

Θέτουμε $3^{\eta\mu^2 x} = \omega$, $\omega > 0$ και έχουμε

$$\omega + \frac{3}{\omega} = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow \omega^2 - 2\sqrt{3}\omega + 3 = 0 \Leftrightarrow (\omega - \sqrt{3})^2 = 0$$

$$\text{Έτσι } \omega = \sqrt{3} \Leftrightarrow 3^{\eta\mu^2 x} = (3)^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \eta\mu^2 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ή } \eta\mu x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\eta\mu x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{4} \text{ ή } x = 2k\pi + \frac{5\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\eta\mu x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \text{ ή } x = 2k\pi + \frac{3\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

ΘΕΜΑ 4^ο

α) Πρέπει $x > 0$ και $2\ln x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \ln x \neq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \neq \sqrt{e}$

Άρα $A_f = (0, \sqrt{e}) \cup (\sqrt{e}, +\infty)$.

Για το σημείο τομής της γ.π. της f με τον x ' x έχουμε

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2\ln x + 1}{2\ln x - 1} = 0 \Leftrightarrow 2\ln x + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$2\ln x = -1 \Leftrightarrow \ln x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = e^{-\frac{1}{2}} \text{ άρα το σημείο τομής είναι } \left(e^{-\frac{1}{2}}, 0 \right).$$

β) Έχουμε

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{2\ln\frac{1}{x} + 1}{2\ln\frac{1}{x} - 1} = \frac{-2\ln x + 1}{-2\ln x - 1} = \frac{2\ln x - 1}{2\ln x + 1} = \frac{1}{f(x)} \text{ για κάθε } x \in A_f \text{ και } x \neq e^{-\frac{1}{2}}.$$

γ) Η εξίσωση γίνεται

$$f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3 \Leftrightarrow f(x) + \frac{2}{f(x)} = 3 \Leftrightarrow f^2(x) - 3f(x) + 2 = 0$$

Η εξίσωση είναι δευτέρου βαθμού και έχει ρίζες $f(x) = 1$ και $f(x) = 2$

$$\text{Αν } f(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{2\ln x + 1}{2\ln x - 1} = 1 \Leftrightarrow 2\ln x + 1 = 2\ln x - 1 \Leftrightarrow 1 = -1 \text{ αδύνατο.}$$

$$\text{Αν } f(x) = 2 \Leftrightarrow \frac{2\ln x + 1}{2\ln x - 1} = 2 \Leftrightarrow 2\ln x + 1 = 4\ln x - 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\ln x = 3 \Leftrightarrow x = e^{\frac{3}{2}} \text{ δεκτή.}$$

δ) Παρατηρούμε ότι $f(e^x) = \frac{2\ln e^x + 1}{2\ln e^x - 1} = \frac{2x + 1}{2x - 1}$

Άρα η τιμή της παράστασης

$$A = \ln f(e^{1000}) + \ln f(e^{1001}) + \ln f(e^{1002}) + \ln f(e^{1003}) + \ln f(e^{1004}) \text{ είναι}$$

$$A = \ln \left[f(e^{1000}) \cdot f(e^{1001}) \cdot f(e^{1002}) \cdot f(e^{1003}) \cdot f(e^{1004}) \right] =$$

$$= \ln \left[\frac{2001}{1999} \cdot \frac{2003}{2001} \cdot \frac{2005}{2003} \cdot \frac{2007}{2005} \cdot \frac{2009}{2007} \right] = \ln \frac{2009}{1999} = \ln 2009 - \ln 1999$$