



08
επαναληπτικά
θέματα

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΘΕΤΙΚΗ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

A. α. Βλέπε Πόρισμα σελίδα 251 σχολικού βιβλίου.

β. Βλέπε σελίδα 224 σχολικού βιβλίου.

B. α. (Σ), β. (Σ), γ. (Σ), δ. (Σ).

Γ. α. 0, β. 8, γ. 44

ΘΕΜΑ 2^ο

α. Η f είναι συνεχής για $x < 0$, ως πολυώνυμική και για $x > 0$, ως άθροισμα της τριγωνομετρικής $\eta\mu x$ με την σταθερή $c(x) = \lambda$. Στο $x_0 = 0$ έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\eta\mu x + \lambda) = \lambda$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} ((\mu - 1)x + 1) = 1$$

Ακόμα $f(0) = 1$. Για να είναι η συνάρτηση συνεχής στο $x_0 = 0$ πρέπει και αρκεί:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) \Leftrightarrow \lambda = 1$$

Επομένως, η ζητούμενη τιμή είναι $\lambda = 1$.

β. Για $x > 0$ έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu x + \lambda - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu x + 1 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$$

Για $x < 0$ έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(\mu - 1)x + 1 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(\mu - 1)x}{x} = \mu - 1$$

Για να είναι η συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ πρέπει και αρκεί:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \Leftrightarrow \mu - 1 = 1 \Leftrightarrow \mu = 2$$

Επομένως, η ζητούμενη τιμή είναι $\mu = 2$.

γ. Είναι π.χ. $f(0) = f(\pi) = \lambda$, άρα η συνάρτηση δεν είναι 1-1.

δ. Είναι

$$f(x) = \begin{cases} \eta\mu x + 1, & \text{αν } x > 0 \\ x + 1, & \text{αν } x \leq 0 \end{cases}$$

και

$$\begin{aligned} \int_{-2}^{\pi} f(x) dx &= \int_{-2}^0 f(x) dx + \int_0^{\pi} f(x) dx = \int_{-2}^0 (x+1) dx + \int_0^{\pi} (\eta\mu x + 1) dx = \\ &= \left[\frac{x^2}{2} + x \right]_{-2}^0 + [-\sigma\upsilon\nu x + x]_0^{\pi} = \pi + 2 \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 3^ο

α. i. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι :

$$f'(x) = (e^{1-e^x})' = (1 - e^x)' \cdot e^{1-e^x} = -e^x \cdot e^{1-e^x} = -e^{1+x-e^x}$$

Επειδή $e^{1+x-e^x} > 0$ είναι $f'(x) < 0$ στο \mathbb{R} , άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R}

ii. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$f''(x) = (-e^{1+x-e^x})' = -(1+x-e^x)' \cdot e^{1+x-e^x} = -(1+e^x) \cdot e^{1+x-e^x} = (e^x - 1) \cdot e^{1+x-e^x}$$

$$\text{Έτσι: } f''(x) = 0 \Leftrightarrow (e^x - 1) \cdot e^{1+x-e^x} = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\text{και } f''(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0, \quad f''(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0$$

Η f είναι συνεχής στο \mathbb{R} με $f'(x) < 0$ στο διάστημα $(-\infty, 0)$, άρα στρέφει τα κοίλα κάτω στο διάστημα $(-\infty, 0]$. Ακόμα είναι $f'(x) > 0$ στο διάστημα $(0, +\infty)$, άρα η f στρέφει τα κοίλα άνω στο $[0, +\infty)$.

Τέλος, η συνάρτηση έχει σημείο καμπής το $(0, f(0))$, γιατί εκατέρωθεν του αλλάζει κυρτότητα και υπάρχει η εφαπτομένη της γραφικής της παράστασης σ' αυτό, αφού είναι παραγωγίσιμη.

Είναι $f(0) = e^{1-1} = e^0 = 1$ έτσι, η συνάρτηση έχει σημείο καμπής το $(0, 1)$.

β. Θα βρούμε, αν υπάρχουν, τα όρια:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{1-e^x}) \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{1-e^x})$$

Θέτουμε $u = 1 - e^x$ οπότε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - e^x) = -\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} u = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - e^x) = 1 - 0 = 0$$

Τότε είναι:

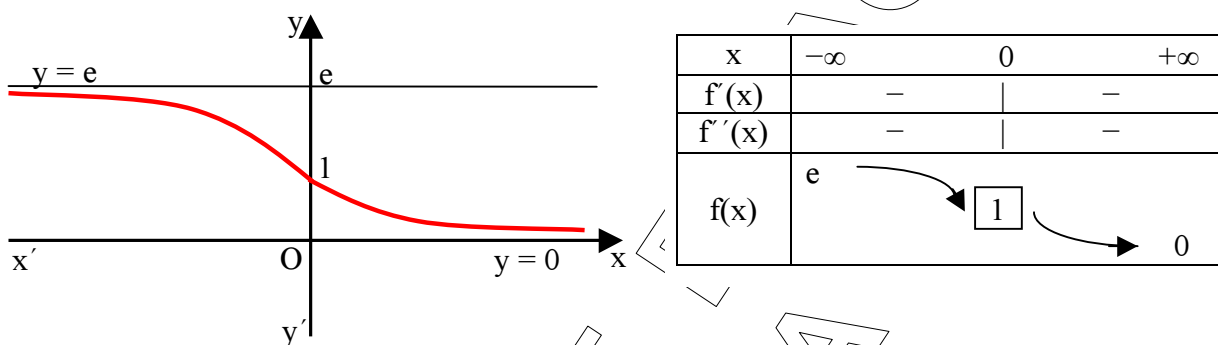
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{1-e^x}) = \lim_{u \rightarrow -\infty} e^u = 0$$

και

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{1-e^x}) = \lim_{u \rightarrow 1} (e^u) = e$$

Επομένως, η γραφική παράσταση της συνάρτησης έχει οριζόντια ασύμπτωτη την $y = 0$ στο $+\infty$ και την $y = e$ στο $-\infty$.

- γ. Με βάση τις πληροφορίες των προηγούμενων ερωτημάτων σχεδιάζουμε την γραφική παράσταση της συνάρτησης:



- δ. Στο α ερώτημα βρήκαμε $f'(x) < 0$, οπότε $|f'(x)| = -f'(x)$ και έτσι:

$$\begin{aligned} E &= \int_{\ln \frac{1}{2}}^0 |f'(x)| dx = - \int_{\ln \frac{1}{2}}^0 f'(x) dx = - [f(x)]_{\ln \frac{1}{2}}^0 = -f(0) + f\left(\ln \frac{1}{2}\right) = \\ &= -e^{1-e^0} + e^{1-e^{\ln \frac{1}{2}}} = -1 + e^{1/2} \text{ τμ} \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 4^ο

- α. Επειδή οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς, οι συναρτήσεις $\int_1^x f(t) dt$ και $\int_1^x f(t) dt$, που ορίζονται από ολοκλήρωμα, είναι παραγωγίσιμες, έτσι μπορούμε να παραγωγίσουμε και τα δύο μέλη της (1), οπότε έχουμε:

$$\left(\int_1^x f(t) dt - 2 \right)' = \left(x \int_0^x g(t) dt \right)'$$

$$\text{ή } f(x) = x g(x) + \int_0^x g(t) dt \quad (3)$$

Για $x = 0$ παίρνουμε: $f(0) = 0 + \int_0^0 g(t) dt = 0$

Με $x \neq 0$ από την (3) έχουμε:

$$\frac{f(x)}{x} = g(x) + \frac{\int_0^x g(t) dt}{x}$$

και:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(g(x) + \frac{\int_0^x g(t) dt}{x} \right)$$

Επειδή η g είναι συνεχής στο \mathbb{R} , άρα και στο $x_0 = 0$, είναι $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = g(0)$.

Η συνάρτηση $h(x) = \int_0^x g(t) dt$, $x \in \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη, άρα είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, οπότε:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_0^x g(t) dt = \lim_{x \rightarrow 0} h(x) = h(0) = \int_0^0 g(t) dt = 0$$

Επομένως, το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x g(t) dt}{x}$$

είναι μορφή $0/0$ και υπολογίζεται με τον κανόνα του De L' Hospital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x g(t) dt}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\int_0^x g(t) dt)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{1} = g(0)$$

Έτσι:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(g(x) + \frac{\int_0^x g(t) dt}{x} \right) = 2g(0)$$

οπότε, τελικά:

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2g(0)$$

β. Η (1) για $x = 1$ δίνει $-2 = \int_0^1 g(t) dt$ (4)

Επειδή η $g(x)$ δεν μηδενίζεται και είναι συνεχής στο \mathbb{R} διατηρεί πρόσημο σ' αυτό. Αν ήταν $g(x) > 0$ τότε

$$\int_0^1 g(t) dt > 0 \Leftrightarrow -2 > 0$$

Άτοπο. Άρα είναι $g(x) < 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

γ. Η (1) για $x = 0$ δίνει $\int_1^0 f(t) dt - 2 = 0 \Leftrightarrow \int_1^0 f(t) dt = 2$ (5)

Είναι $g(x) < 0 \Leftrightarrow -g(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, έτσι:

• με $x \geq 0$ είναι $\int_0^x [-g(t)] dt \geq 0 \Leftrightarrow \int_0^x g(t) dt \leq 0$, άρα: $x \int_0^x g(t) dt \leq 0$

• με $x < 0$ είναι $\int_x^0 [-g(t)] dt > 0 \Leftrightarrow \int_x^0 g(t) dt > 0$, άρα: $x \int_0^x g(t) dt < 0$

Επομένως, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ από την (1) είναι:

$$x \int_0^x g(t) dt \leq 0 \Leftrightarrow \int_1^x f(t) dt - 2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \int_1^x f(t) dt \leq 2$$

$$[\int_1^0 f(t) dt = 2 \text{ από (5)}]$$

$$\Leftrightarrow \int_1^x f(t) dt \leq \int_1^0 f(t) dt$$

2^{ος} τρόπος: Έστω η συνάρτηση $F(x) = \int_1^x f(t) dt$, $x \in \mathbb{R}$ για την οποία $F'(x) = f(x)$. Από την (3), αφού $g(x) < 0$, βρίσκουμε:

- με $x > 0$ είναι $f(x) = x g(x) + \int_0^x g(t) dt < 0 \Leftrightarrow F'(x) < 0$
- με $x = 0$ είναι $f(0) = 0 \Leftrightarrow F'(x) = 0$
- με $x < 0$ είναι $f(x) = x g(x) + \int_0^x g(t) dt > 0 \Leftrightarrow F'(x) > 0$

οπότε η $F(x)$ έχει μέγιστο το $F(0)$, άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$:

$$F(x) \leq F(0) \Leftrightarrow \int_1^x f(t) dt \leq \int_1^0 f(t) dt$$

δ. (Απόδειξη με Rolle σε αρχική). Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$H(x) = \int_0^x f(t) dt - 2 \int_0^x g(t) dt - 2x \text{ με } x \in [0, 1]$$

Επειδή οι f, g είναι συνεχείς, οι συναρτήσεις $\int_0^x f(t) dt$ και $\int_0^x g(t) dt$ ως οριζόμενες από ολοκλήρωμα, είναι παραγωγίσιμες. Ακόμα η $2x$ είναι παραγωγίσιμη, ως πολυωνυμική, άρα η $H(x)$, ως αλγεβρικό άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων, είναι:

- Παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της, άρα και στο $(0, 1)$ με

$$H'(x) = f(x) - 2g(x) - 2$$

- συνεχής στο $[0, 1]$, ως παραγωγίσιμη σ' αυτό.

Ακόμα:

- $H(0) = 0$ και

$$\begin{aligned} H(1) &= \int_0^1 f(t) dt - 2 \int_0^1 g(t) dt - 2 \\ &= - \int_1^0 f(t) dt - 2 \int_0^1 g(t) dt - 2 \\ &= -2 - 2(-2) - 2 = 0 \end{aligned} \quad \text{[από (4) και (5)]}$$

Επομένως, εφαρμόζεται για την $H(x)$ το θεώρημα του Rolle, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0, 1)$ με

$$H'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) - 2g(\xi) - 2 = 0 \Leftrightarrow f(\xi) = 2g(\xi) + 2,$$

που σημαίνει ότι το ξ είναι ρίζα στο $(0, 1)$ της εξίσωσης $f(x) = 2g(x) + 2$.