



Β' ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΑΛΓΕΒΡΑ  
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

**Θέμα 1°**

**A. α)** Για κάθε τόσο  $a$  να αποδείξετε ότι:

$$\sin 2a = \sin^2 a - \eta\mu^2 a = 2\sin^2 a - 1$$

Μονάδες 6

**β)** Αν  $0 < a \neq 1$  και  $\theta_1, \theta_2 > 0$ , να αποδείξετε ότι:

$$\log_a (\theta_1 \theta_2) = \log_a \theta_1 + \log_a \theta_2$$

Μονάδες 7

**B.** Να απαντήσετε αν είναι **Σωστή** ή **Λάθος** κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις:

1. Ισχύει  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  αν και μόνο αν  $a_0 = a_1 = \dots = a_n = 0$ .
2. Αν το πολυώνυμο  $P(x)$  είναι  $\nu$ -βαθμού ( $\nu \in \mathbb{N}^*$ ) τότε το  $P^2(x)$  είναι  $2\nu$  βαθμού.
3. Η εξίσωση  $\sin x = a$  έχει λύση για κάθε  $a \in \mathbb{R}$ .
4. Η συνάρτηση  $f(x) = a^x$ ,  $0 < a \neq 1$  έχει σύνολο τιμών το  $(0, +\infty)$ .
5. Η συνάρτηση  $f(x) = \ln x$  έχει πεδίο ορισμού το  $(0, +\infty)$ .
6. Για κάθε  $x > 0$  ισχύει:  $e^{\ln x} = x$ .
7. Για κάθε  $x \neq 0$  ισχύει:  $\ln x^2 = 2 \ln x$ .
8. Για κάθε  $x > 1$  ισχύει:  $\ln x < 0$ .

Μονάδες 12

**Θέμα 2°**

Δίνεται ότι το πολυώνυμο:

$$P(x) = x^3 + ax^2 + \beta x + 4 \text{ όπου } a, \beta \in \mathbb{R}$$

έχει παράγοντες τους  $x + 1$ ,  $x - 2$ .

**α)** Να αποδείξετε ότι:

$$a = -3 \text{ και } \beta = 0$$

Μονάδες 8

**β)** Να λύσετε την εξίσωση

$$P(x) = 0$$

Μονάδες 8

**γ)** Έστω  $C$  η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $P(x)$ .

Να βρείτε

**i)** Τις συντεταγμένες του σημείου στο οποίο η  $C$  τέμνει τον άξονα  $y'y$ .

Μονάδες 3

**ii)** Τις τιμές του  $x$  για τις οποίες η  $C$  είναι κάτω από τον άξονα  $x'x$ .

Μονάδες 6

### Θέμα 3°

Έστω η αριθμητική πρόοδος  $(a_n)$  με πρώτο όρο  $a_1 = \sigma\upsilon\nu 2x$  και διαφορά  $\omega = \eta\mu 2x$ , όπου  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .

**α)** Να αποδείξετε ότι:  $\frac{1 + a_2}{1 - 2a_4 + a_8} = \sigma\phi x$ .

Μονάδες 9

**β)** Να αποδείξετε ότι:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{10} = 10\sigma\upsilon\nu 2x + 45\eta\mu 2x$$

Μονάδες 7

**γ)** Να λύσετε την εξίσωση:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{10} = -10 + 55\eta\mu 2x$$

Μονάδες 9

### Θέμα 4°

Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \ln(e^x - 2)$

**α)** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f$

Μονάδες 3

**β)** Να λύσετε την εξίσωση:

$$f(2x) = \ln 7 + f(x)$$

Μονάδες 7

**γ)** Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί  $f(\alpha)$ ,  $f(\beta)$ ,  $f(\gamma)$  είναι διαδοχικοί

όροι Αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν:  $(e^\beta - 2)^2 = (e^\alpha - 2)(e^\gamma - 2)$

Μονάδες 7

**δ)** Να αποδείξετε ότι:

$$e^{f(1)} + e^{f(2)} + \dots + e^{f(100)} = \frac{e^{101} - 201e + 200}{e - 1}$$

Μονάδες 8