



Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1°

- Α. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 85
Β. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 150
Γ. 1.Γ – 2.Α – 3.Α,Γ – 4.Α,Δ,Δ

ΘΕΜΑ 2°

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+3} - x - 1}{x^2 - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x^2+1} - x - 1)(\sqrt{x^2+1} + x + 1)}{(x^2 - 1)(\sqrt{x^2+1} + x + 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x^2+3})^2 - (x+1)^2}{(x^2 - 1)(\sqrt{x^2+3} + x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3 - x^2 - 2x - 1}{(x^2 - 1)(\sqrt{x^2+3} + x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2(x-1)}{(x-1)(x+1)(\sqrt{x^2+3} + x + 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2}{(x+1)(\sqrt{x^2+3} + x + 1)} = \frac{-2}{2(\sqrt{4+2})} = \frac{-2}{8} = \frac{-1}{4} \end{aligned}$$

$$\text{άρα } -\frac{1}{2\lambda} = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow 2\lambda = 4 \Leftrightarrow \lambda = 2$$

$$\text{ii)} \quad f(x) = \lambda x^3 - 6x + \mu. \quad A_f = \mathbb{R}. \quad \text{Για } \lambda=2: f(x) = 2x^3 - 6x + \mu$$

Η f παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} ως πολυωνυμική με : $f'(x) = 6x^2 - 6$.

$$\text{Είναι: } f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow 6(x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = -1$$

$$\text{Και: } f'(x) > 0 \Leftrightarrow 6(x-1)(x+1) > 0$$

$$\begin{array}{c} -1 \qquad 1 \\ + \quad | \quad - \quad | \quad + \end{array}$$

οπότε $x < -1$ ή $x > 1$

Ο πίνακας μεταβολών της f είναι:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
f'	+	-	+	
f	↗	↘	↗	

Η f παρουσιάζει μέγιστο για $x = -1$, το $f(-1) = -2 + 6 + \mu = \mu + 4$

$$\text{Οπότε: } \mu + 4 = 9 \Leftrightarrow \mu = 5$$

- iii) Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της C_f στο $A(x_0, f(x_0))$ είναι $f'(x_0)$. Οπότε, τα ζητούμενα σημεία έχουν τετμημένες τις λύσεις της εξίσωσης $f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ή } x = 1$

Είναι : $f(-1) = 9$ και $f(1) = 1$

Άρα τα ζητούμενα σημεία είναι : Β(-1,9) και Γ(1,1).

iv) Ο ρυθμός μεταβολής της f συναρτήσεως του x είναι: $f'(x) = 6x^2 - 6$

Είναι: $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 12x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ και $f''(x) > 0 \Leftrightarrow 12x > 0 \Leftrightarrow x > 0$

Ο πίνακας μεταβολών της f' είναι:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f''		-	+
f'		↘	↗

Η f' παρουσιάζει ελάχιστο για $x = 0$
οπότε ο ρυθμός μεταβολής της f γίνεται
ελάχιστος για $x = 0$

ΘΕΜΑ 3^ο

A.

i)

Αριθμός επιβατών x_i	Αριθμός αυτοκινήτων v_i	f_i	$f_i \%$	N_i	F_i	$F_i \%$	$x_i v_i$	$(x_i - \bar{x})^2 v_i$
1	50	0,125	12,5	50	0,125	12,5	50	200
2	110	0,275	27,5	160	0,4	40	220	110
3	120	0,3	30	280	0,7	70	360	0
4	30	0,075	7,5	310	0,775	77,5	120	30
5	90	0,225	22,5	400	1	100	450	360
ΣΥΝΟΛΑ	$v = 400$	1	100				1200	700

ii) Η μέση τιμή είναι: $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i v_i}{400} = \frac{1200}{400} = 3$

Αφού $n = 400$ (άρτιος), η διάμεσος θα είναι το ημίαθροισμα των δύο μεσαίων παρατηρήσεων, αν αυτές έχουν διαταχθεί κατ' αύξουσα σειρά.

Δηλαδή: $\delta = \frac{t_{200} + t_{201}}{2} = \frac{3 + 3}{2} = 3$

iii) Η διακύμανση είναι: $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2 v_i}{400} = \frac{700}{400} = \frac{7}{4}$

Οπότε η τυπική απόκλιση είναι: $s = \sqrt{\frac{7}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2}$

Τέλος ο συντελεστής μεταβολής είναι: $CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{\frac{\sqrt{7}}{2}}{3} = \frac{\sqrt{7}}{6} > \frac{0,6}{6} = \frac{1}{10}$

αφού $\sqrt{7} > 0,6$.

Οπότε $CV > \frac{1}{10}$ δηλ. $CV > 10\%$, άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

B. Το πολύ δύο επιβάτες έχουν: $v_1 + v_2 = 50 + 110 = 160$ αυτοκίνητα

Οπότε $N(A) = 160$, άρα η ζητούμενη πιθανότητα θα είναι:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{160}{400} = \frac{2}{5}$$

Τουλάχιστον τέσσερις επιβάτες έχουν : $v_4 + v_5 = 30 + 90 = 120$ αυτοκίνητα.
Οπότε $N(B) = 120$, άρα η ζητούμενη πιθανότητα θα είναι :

$$P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{120}{400} = \frac{3}{10}$$

Γ. Στην περίπτωση αυτή ο δειγματικός χώρος αποτελείται από το σύνολο των επιβαινόντων, δηλ. $N(\Omega) = \sum_{i=1}^5 x_i v_i = 1200$

Τρεις συνεπιβάτες έχει όποιος επιβαίνει σε αυτοκίνητο με 4 επιβαίνοντες, δηλ. $x_4 \cdot v_4 = 120$ άτομα. Οπότε $N(\Gamma) = 120$, άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι :

$$P(\Gamma) = \frac{N(\Gamma)}{N(\Omega)} = \frac{120}{1200} = \frac{1}{10}$$

Κανέναν συνεπιβάτη δεν έχει όποιος επιβαίνει σε αυτοκίνητο μόνος του, δηλ. $x_1 \cdot v_1 = 50$ άτομα. Οπότε $N(\Delta) = 50$, άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$P(\Delta) = \frac{N(\Delta)}{N(\Omega)} = \frac{50}{1200} = \frac{1}{24}$$

ΘΕΜΑ 4^ο

A.

- i) Έστω \bar{x} η μέση ηλικία των κατοίκων και s η τυπική απόκλιση. Τότε, μετά από 25 χρόνια, σύμφωνα με γνωστή εφαρμογή, η μέση τιμή θα 'ναι $\bar{x} + 25$ ενώ η τυπική απόκλιση δεν θα μεταβληθεί. Αφού το δείγμα γίνεται για πρώτη φορά ομοιογενές μετά από 25 χρόνια, τότε ο συντελεστής μεταβλητότητας θα είναι 10%.

$$\text{Οπότε : } \frac{s}{\bar{x} + 25} = \frac{1}{10} \quad (1)$$

$$\text{Επίσης, αφού CV είναι τώρα 20\%, είναι: } \frac{s}{\bar{x}} = \frac{20}{100} = \frac{1}{5} \quad (2)$$

Λύνουμε το σύστημα:

$$\begin{array}{l|l|l|l|l|l} \frac{s}{\bar{x} + 25} = \frac{1}{10} & 10s = \bar{x} + 25 & 10s = 5s + 25 & 5s = 25 & s = 5 & \\ \frac{s}{\bar{x}} = \frac{1}{5} & \bar{x} = 5s & \bar{x} = 5s & \bar{x} = 5s & \bar{x} = 25 & \end{array}$$

- ii) Η μέση τιμή των $x_1^2, x_2^2, \dots, x_v^2$ είναι: $\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_v^2}{v} = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^v x_i^2$

$$\text{Είναι : } s^2 = \frac{1}{v} \left[\sum_{i=1}^v x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^v x_i \right)^2}{v} \right]$$

$$25 = \frac{\sum_{i=1}^v x_i^2}{v} - \left(\frac{\sum_{i=1}^v x_i}{v} \right)^2$$

$$25 = \frac{\sum_{i=1}^v x_i^2}{v} - \bar{x}^2$$

$$25 = \frac{\sum_{i=1}^v x_i^2}{v} - 625$$

$$\frac{\sum_{i=1}^v x_i^2}{v} = 650$$

- iii) Στην κανονική κατανομή για το εύρος του δείγματος ισχύει $R \approx 6s$. Αφού λοιπόν η μικρότερη τιμή x_{\min} είναι 10, για τη μεγαλύτερη τιμή x_{\max} θα ισχύει η προσέγγιση: $x_{\max} \approx 10 + 6s$, δηλ. $x_{\max} \approx 40$

B.

Επιλέγουμε τυχαία έναν από τους ανθρώπους που υπάρχουν στο χωριό. Έστω τα ενδεχόμενα:

A: "ο άνθρωπος πηγαίνει στο καφενείο A"

B: "ο άνθρωπος πηγαίνει στο καφενείο B"

Αφού το 30% των κατοίκων πηγαίνουν στο A, είναι: $P(A) = 0,3$

Αφού το 60% των κατοίκων δεν πηγαίνουν στο B, είναι $P(B') = 0,6 \Leftrightarrow 1 - P(B) = 0,6 \Leftrightarrow P(B) = 0,4$

Αφού το 50% των κατοίκων πηγαίνει σ' ένα τουλάχιστον απ' τα δύο καφενεία, είναι $P(A \cup B) = 0,5$

- i) $A \cap B$ είναι το ενδεχόμενο ένας κάτοικος να πηγαίνει και στα δύο καφενεία. Έχουμε:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow 0,5 = 0,3 + 0,4 - P(A \cap B) \Leftrightarrow$$

$$P(A \cap B) = 0,7 - 0,5 = 0,2$$

οπότε και στα δύο καφενεία πηγαίνει το 20% των κατοίκων.

- ii) $A - B$ είναι το ενδεχόμενο ένας κάτοικος να πηγαίνει μόνο στο καφενείο A και

$B - A$ είναι το ενδεχόμενο ένας κάτοικος να πηγαίνει μόνο στο καφενείο B.

Έχουμε: $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = 0,3 - 0,2 = 0,1$ δηλαδή μόνο στο A πηγαίνει το 10% των κατοίκων

Ομοίως: $P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = 0,4 - 0,2 = 0,2$ δηλαδή μόνο στο B πηγαίνει το 20% των κατοίκων.

Οπότε περισσότεροι είναι οι κάτοικοι που πηγαίνουν μόνο στο B από εκείνους που πηγαίνουν μόνο στο A.

Γ. Αφού η πιθανότητα να κληρωθεί περιττός αριθμός είναι μεγαλύτερη από την πιθανότητα να κληρωθεί άρτιος, οι περιττοί αριθμοί είναι περισσότεροι από τους άρτιους στο δείγμα $1, \dots, n$ άρα n περιττός. Δηλαδή υπάρχει ένας

περιττός περισσότερο. Έτσι, το πλήθος των περιττών είναι $\frac{v+1}{2}$ ενώ των άρτιων $\frac{v-1}{2}$.

Έστω τα ενδεχόμενα:

Π: “ο αριθμός που κληρώνεται είναι περιττός”

Α: “ο αριθμός που κληρώνεται είναι άρτιος”

$$\text{Τότε: } P(\Pi) = \frac{N(\Pi)}{N(\Omega)} = \frac{\frac{v+1}{2}}{v} = \frac{v+1}{2v}$$

$$\text{Και: } P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{\frac{v-1}{2}}{v} = \frac{v-1}{2v}$$

Αφού η $P(\Pi)$ είναι κατά 0,8% μεγαλύτερη από την $P(A)$, έχουμε:

$$P(\Pi) = P(A) + \frac{0,8}{100}$$

$$\frac{v+1}{2v} = \frac{v-1}{2v} + 0,008$$

$$v+1 = v-1 + 0,016v$$

$$2 = 0,016v$$

$$v = \frac{2}{0,016} = \frac{2000}{16} = 125$$

άρα στο χωριό υπάρχουν 125 άτομα