

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ



**Θέμα 1**

**A. α)** Έστω μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη σ' ένα διάστημα  $\Delta$  και  $x_0$  ένα εσωτερικό σημείο του  $\Delta$ . Αν η  $f$  παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο  $x_0$  και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, να αποδείξετε ότι:  $f'(x_0) = 0$ .

**Μονάδες 11**

**β)** Πότε η ευθεία  $x = x_0$  λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης  $f$ ;

**Μονάδες 4**

**B.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος**.

**α)** Μια συνάρτηση  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  είναι  $\langle 1 \rightarrow 1 \rangle$  όταν για κάθε  $x_1, x_2 \in A$  ισχύει η συνεπαγωγή:  $f(x_1) = f(x_2)$  τότε  $x_1 = x_2$ .

**β)** Αν υπάρχει το  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x))$  τότε κατ' ανάγκη υπάρχουν τα  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  και  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ .

**γ)** Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$  ή  $-\infty$  τότε  $f(x) \neq 0$  για τις τιμές του  $x$  κοντά στο  $x_0$ .

**δ)** Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι δύο φορές παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα  $\Delta$  και δεν παρουσιάζει καμπή σε κανένα σημείο του  $\Delta$ , τότε  $f''(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in \Delta$ .

**ε)** Αν  $\int_a^\beta f(x) dx = 0$  και  $a < \beta$  τότε κατ' ανάγκη ισχύει  $f(x) = 0$  για κάθε  $x \in [a, \beta]$ .

**Μονάδες 10**

**Θέμα 2**

Δίνονται οι μιγαδικοί  $z$  και  $w = \frac{z+i}{1+iz}$  όπου  $z \neq i$ .

α) Να αποδείξετε ότι:  $\left| \frac{w-i}{w+i} \right| = |z|$

**Μονάδες 5**

β) Αν  $|z|=1$  και  $M$  η εικόνα του  $w$  στο μιγαδικό επίπεδο, να αποδείξετε ότι το σημείο  $M$  ανήκει στον άξονα  $x'x$ .

**Μονάδες 6**

γ) Να αποδείξετε την ισοδυναμία:  $w$  φανταστικός  $\Leftrightarrow z$  φανταστικός.

**Μονάδες 7**

δ) Θεωρούμε συνάρτηση  $f$  συνεχή στο  $[a, \beta]$  με  $f(a) > 1$  και έστω  $z = f(a) \cdot i$  και  $w = f(\beta) \cdot i$ . Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει μια τουλάχιστον λύση στο  $(a, \beta)$ .

**Μονάδες 7****Θέμα 3**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = e^x - ax - 1$  όπου  $a > 1$ .

α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $(0, f(0))$ .

**Μονάδες 4**

β) Να αποδείξετε ότι η  $f$  παρουσιάζει ελάχιστο το οποίο είναι αρνητικό.

**Μονάδες 8**

γ) Έστω  $E(a)$  το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f$ , την εφαπτομένη της στο  $(0, f(0))$  και την ευθεία  $x = a > 1$ .

i) Να αποδείξετε ότι:  $E(a) = e^a - \frac{a^2}{2} - a - 1$ .

**Μονάδες 7**

ii) Να βρείτε το  $\lim_{a \rightarrow +\infty} E(a)$ .

**Μονάδες 6**

**Θέμα 4**

Έστω συνάρτηση  $f$  συνεχής στο  $\mathbb{R}$  με  $f(x) > 0$  και έστω

$$g(x) = \int_0^1 t \cdot f(xt) dt, \quad t, x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

**α)**  $g(x) = \frac{1}{x^2} \int_0^x t \cdot f(t) dt$  για κάθε  $x \neq 0$ .

**Μονάδες 6**

**β)** Η  $g$  είναι συνεχής στο  $x_0 = 0$ .

**Μονάδες 6**

**γ)**  $x \cdot g(x) < \int_0^x f(t) dt$  για κάθε  $x > 0$ .

**Μονάδες 7**

**δ)** Αν  $\int_1^2 t \cdot f(t) dt = 3 \int_0^1 t \cdot f(t) dt$  τότε υπάρχει ένας τουλάχιστον  $\xi \in (1, 2)$  τέτοιος ώστε:  $2g(\xi) = f(\xi)$ .

**Μονάδες 6**