



Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Θέμα 1

Β) α) Σωστό β) Λάθος γ) Σωστό δ) Λάθος ε) Λάθος

Θέμα 2

$$\alpha) \left| \frac{w-i}{w+i} \right| = \left| \frac{\frac{z+i}{1+iz} - i}{\frac{z+i}{1+iz} + 1} \right| = \left| \frac{z+i-i-i^2z}{z+i+i+i^2z} \right| = \left| \frac{2z}{2i} \right| = |z|$$

β) Λόγω (α) ερωτήματος έχουμε: $|w-i| = |w+i|$. Αν $w = x + yi$ τότε

$$|x + yi - i| = |x + yi + i| \Leftrightarrow |x + (y-1)i| = |x + (y+1)i| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y-1)^2} = \sqrt{x^2 + (y+1)^2} \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2y + 1 = x^2 + y^2 + 2y + 1 \Leftrightarrow y = 0$$

Άρα το σημείο M ανήκει στον x'x.

$$\gamma) w \in I \Leftrightarrow w = -\bar{w} \Leftrightarrow \frac{z+i}{1+iz} = -\frac{\bar{z}-i}{1-i\bar{z}} \Leftrightarrow$$

$$(z+i)(1-i\bar{z}) = -(1+iz)(\bar{z}-i) \Leftrightarrow$$

$$z+i-iz\bar{z}+\bar{z} = -(\bar{z}+iz\bar{z}-i+z) \Leftrightarrow$$

$$z+i-iz\bar{z}+\bar{z} = -\bar{z}-iz\bar{z}+i-z \Leftrightarrow 2z = -2\bar{z} \Leftrightarrow z = -\bar{z} \Leftrightarrow z \in I.$$

$$\delta) \text{ Έχουμε } f(\beta)i = \frac{f(a)i+i}{1+i^2f(a)} \Leftrightarrow f(\beta) = \frac{f(a)+1}{1-f(a)} < 0 \text{ διότι } f(a) > 1$$

Άρα $f(a) \cdot f(\beta) < 0$. Η f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$.

Σύμφωνα με το θ. Bolzano η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο (a, β) .

Θέμα 3

α) $f'(x) = e^x - a$ οπότε $f'(0) = 1 - a$

$$\varepsilon: y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow$$

$$y = (1 - a)x$$

β) Είναι $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq a \Leftrightarrow x \geq \ln a$

x	$-\infty$	$\ln a$	$+\infty$
$f'(x)$	-		+
$f(x)$	↘		↗

Η f στο $x_0 = \ln a$ παρουσιάζει ελάχιστο το

$$g(a) = e^{\ln a} - a \ln a - 1 = a - a \ln a - 1$$

Επειδή $g'(a) = 1 - \ln a - 1 = -\ln a < 0$ για κάθε $a \in (1, +\infty)$ και g συνεχής στο $[1, +\infty)$ η g είναι \downarrow στο $[1, +\infty)$ οπότε για κάθε $a > 1$ ισχύει $g(a) < g(1) = 0$

γ) i) $E(a) = \int_0^a |f(x) - (1-a)x| dx$. Επειδή η f είναι κυρτή διότι

$$f''(x) = e^x > 0 \text{ και η } \psi = (1-a)x \text{ εφαπτομένη της } c_f \text{ στο } (0, f(0)),$$

ισχύει :

$$f(x) \geq (1-a)x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Άρα } E(a) = \int_0^a (e^x - ax - 1 - x + ax) dx = \int_0^a (e^x - x - 1) dx$$

$$= \left[e^x - \frac{x^2}{2} - x \right]_0^a = e^a - \frac{a^2}{2} - a - 1 \text{ τ.μ.}$$

ii) $E(a) = a^2 \left(\frac{e^a}{a^2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{a} - \frac{1}{a^2} \right)$. Είναι $\lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{e^a}{a^2} = \lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{(e^a)'}{(a^2)'}$

$$= \lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{e^a}{2a} = \lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{(e^a)'}{(2a)'} = \lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{e^a}{2} = +\infty. \text{ Επομένως } \lim_{a \rightarrow +\infty} E(a) = +\infty$$

Θέμα 4

α) Θέτουμε $x \cdot t = u$ τότε $(xt)' dt = du \Leftrightarrow x dt = du$ οπότε

για κάθε $x \neq 0$ είναι $dt = \frac{1}{x} du$

- Για $t = 0$ είναι $u = 0$ και για $t = 1$ είναι $u = x$.

$$\text{Άρα } g(x) = \int_0^x \frac{u}{x} \cdot \frac{1}{x} \cdot f(u) dx = \frac{1}{x^2} \int_0^x u f(u) du$$

Επειδή το ολοκλήρωμα είναι ανεξάρτητο της μεταβλητής ολοκλήρωσης, έχουμε.

$$g(x) = \frac{1}{x^2} \int_0^x t f(t) dt, \quad x \neq 0$$

β) Η g είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, όταν $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = g(0)$.

$$\text{Είναι } g(0) = \int_0^1 t f(0) dt = f(0) \int_0^1 t dt = f(0) \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} f(0)$$

$$\text{Επειδή } \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0} \int_0^x t f(t) dt = \int_0^0 t f(t) dt = 0$$

(Η $\int_0^x t f(t) dt$ είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής)

σύμφωνα με το θ. De L' Hospital έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\int_0^x t f(t) dt \right)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x f(x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{2} = \frac{f(0)}{2}$$

διότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ Άρα $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = g(0)$

που σημαίνει ότι η g είναι συνεχής στο $x_0 = 0$

γ) Για κάθε $x > 0$ η ανισότητα γράφεται:

$$x \cdot \frac{1}{x^2} \int_0^x t f(t) dt < \int_0^x f(t) dt \Leftrightarrow \frac{1}{x} \int_0^x t f(t) dt < \int_0^x f(t) dt \Leftrightarrow$$

$$\int_0^x t f(t) dt < x \int_0^x f(t) dt \Leftrightarrow \int_0^x t f(t) dt - x \int_0^x f(t) dt < 0$$

Έστω η συνάρτηση:

$$h(x) = \int_0^x t f(t) dt - x \int_0^x f(t) dt, \quad x \geq 0$$

$$h'(x) = x \cdot f(x) - \int_0^x f(t) dt - x \cdot f(x) = -\int_0^x f(t) dt < 0 \text{ για κάθε } x > 0.$$

διότι από $f(t) > 0$ προκύπτει ότι:

$$\int_0^x f(t) dt > 0 \text{ για κάθε } x > 0.$$

Η h είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ (πράξεις συνεχών συναρτήσεων)

Άρα η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$. Επομένως για κάθε $x > 0$

$$\text{ισχύει } h(x) < h(0) \text{ Αλλά } h(0) = \int_0^0 t f(t) dt = 0 \text{ συνεπώς}$$

$$g(x) < 0 \text{ για κάθε } x > 0.$$

δ) Η g είναι παραγωγίσιμη στο $[1, 2]$ και ισχύει:

$$g(2) = \frac{1}{4} \int_0^2 t \cdot f(t) dt = \frac{1}{4} \left(\int_0^1 t \cdot f(t) dt + \int_1^2 t \cdot f(t) dt \right) = \int_0^1 t \cdot f(t) dt = g(1).$$

Σύμφωνα με το Θ. Rolle υπάρχει $\xi \in (1, 2)$ τέτοιος ώστε $g'(\xi) = 0$.

Με παραγωγή των μελών της $x^2 g(x) = \int_0^x t \cdot f(t) dt$ έχουμε:

$$2x \cdot g(x) + x^2 g'(x) = x \cdot f(x) \Leftrightarrow 2g(x) + x g'(x) = f(x) \text{ οπότε για } x = \xi$$

$$\text{προκύπτει: } 2g(\xi) + \xi \cdot g'(\xi) = f(\xi) \Leftrightarrow 2g(\xi) = f(\xi)$$