



Β' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΘΕΤΙΚΗ & ΤΕΧΝ. ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Θέμα 1

γ) i) Λάθος ii) Σωστή iii) Σωστή iv) Λάθος

Θέμα 2

$$\alpha) \vec{a} \cdot \vec{\beta} = |\vec{a}| |\vec{\beta}| \cos(\vec{a}, \vec{\beta}) = 2 \cdot 3 \cdot \cos \frac{2\pi}{3} = 6 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -3$$

$$\beta) \text{ Ισχύει } 2\vec{AM} = \vec{AB} + \vec{AG} \text{ άρα}$$

$$\vec{AG} = 2\vec{AM} - \vec{AB} = 2(3\vec{a} + \vec{\beta}) - (2\vec{a} - \vec{\beta}) =$$

$$= 6\vec{a} + 2\vec{\beta} - 2\vec{a} + \vec{\beta} = 4\vec{a} + 3\vec{\beta}$$

$$\gamma) |\vec{AM}|^2 = |3\vec{a} + \vec{\beta}|^2 = 9\vec{a}^2 + 6\vec{a} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta}^2 =$$

$$= 9 \cdot 4 + 6 \cdot (-3) + 9 = 39 - 18 + 9 = 27 \text{ Άρα } |\vec{AM}| = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$

δ) Αν θ η γωνία των \vec{AM} και \vec{a} τότε

$$\cos \theta = \frac{|\vec{AM} \cdot \vec{a}|}{|\vec{AM}| \cdot |\vec{a}|} = \frac{(3\vec{a} + \vec{\beta}) \cdot \vec{a}}{3\sqrt{3} \cdot 2} = \frac{3\vec{a}^2 + \vec{\beta} \cdot \vec{a}}{6\sqrt{3}} = \frac{3 \cdot 4 - 3}{6\sqrt{3}} = \frac{9}{6\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{9\sqrt{3}}{18} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{\pi}{6}$$

Επειδή $0 \leq \theta \leq \pi$ είναι $\theta = \frac{\pi}{6}$

Θέμα 3

$$\alpha) (AB) = \sqrt{(1+2)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{10} \text{ και } d(A, \varepsilon) = \frac{|3 \cdot 1 + 3 + a| \cdot |6+a|}{\sqrt{3^2+1^2} \cdot \sqrt{10}}$$

$$\text{Είναι } \frac{|6+a|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10} \Leftrightarrow |6+a| = 10 \Leftrightarrow 6+a = 10 \text{ ή } 6+a = -10 \Leftrightarrow \\ a = 4 \text{ ή } a = -16.$$

β) i) $\varepsilon: 3x + y + 4 = 0$ οπότε $\Gamma(0, -4)$.

$$E = \frac{1}{2} |\det(\overline{AB}, \overline{A\Gamma})|.$$

$$\overline{AB} = (-3, -1) \text{ και } \overline{A\Gamma} = (-1, 7)$$

$$\text{οπότε } \det(\overline{AB}, \overline{A\Gamma}) = \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -1 & 7 \end{vmatrix} = -21 + 1 = -20$$

$$\text{Άρα } E = \frac{1}{2} |-20| = \frac{20}{2} = 10 \text{ τ.μ.}$$

ii) Φέρνουμε $OH \perp \varepsilon$.

Το σημείο H έχει τη μικρότερη απόσταση από το O διότι για κάθε άλλο σημείο M της ε ισχύει $OM > OH$ (υποτείνουσα και κάθετη πλευρά στο τρίγωνο OHM).

$$\lambda_\varepsilon \cdot \lambda_{OH} = -1 \text{ και } \lambda_\varepsilon = -3 \text{ άρα } \lambda_{OH} = \frac{1}{3}$$

$$OH: y = \frac{1}{3}x.$$

Με επίλυση του συστήματος των εξισώσεων

$$3x + y + 4 = 0 \text{ και } y = \frac{1}{3}x \text{ βρίσκουμε } x = -\frac{6}{5} \text{ και } y = -\frac{2}{5}.$$

Άρα $H\left(-\frac{6}{5}, -\frac{2}{5}\right)$ το σημείο της ε με τη μικρότερη απόσταση από το O .

Θέμα 4

α) $A = \eta\mu\theta, B = -\sigma\upsilon\nu\theta, \Gamma = -2$ και

$$A^2 + B^2 - 4\Gamma = \eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta + 8 = 9 > 0$$

Άρα είναι εξίσωση κύκλου με κέντρο $K\left(-\frac{\eta\mu\theta}{2}, \frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{2}\right)$ και ακτίνα

$$\rho = \frac{\sqrt{9}}{2} = \frac{3}{2}.$$

β) Αν $K(x, y)$ το κέντρο τότε $x = -\frac{\eta\mu\theta}{2}$ και $y = \frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{2}$. Με ύψωσή τους στο τετράγωνο έχουμε $x^2 = \frac{\eta\mu^2\theta}{4}$ και $y^2 = \frac{\sigma\upsilon\nu^2\theta}{4}$ οπότε με πρόσθεσή τους κατά μέλη προκύπτει $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$. Άρα το K κινείται στον κύκλο

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

γ) Ισχύει $1 + 1 + \eta\mu\theta + \sigma\upsilon\nu\theta = 2 \Leftrightarrow \eta\mu\theta = -\sigma\upsilon\nu\theta$

Αν $\sigma\upsilon\nu\theta = 0$ τότε $\eta\mu\theta = 0$ αδύνατο.

Άρα $\sigma\upsilon\nu\theta \neq 0$ επομένως

$$\frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta} = -1 \Leftrightarrow \epsilon\phi\theta = -1 \Leftrightarrow \epsilon\phi\theta = \epsilon\phi\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \theta = \kappa\pi - \frac{\pi}{4}, \kappa \in \mathbb{Z} \text{ πρέπει}$$

$$0 \leq \kappa\pi - \frac{\pi}{4} < \pi \Leftrightarrow 0 \leq \kappa - \frac{1}{4} < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq \kappa < \frac{5}{4}. \text{ Άρα } \kappa = 1 \text{ οπότε}$$

$$\theta = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

δ) Από ερώτημα (β) το K ανήκει στον κύκλο $x^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$ οπότε

$$(OK) = \frac{1}{2}.$$

Αν A το σημείο του κύκλου C που βρίσκεται πιο κοντά στο O , και $\rho = \frac{3}{2}$

η ακτίνα του, ισχύουν:

$$(OA) = \rho - (OK) \text{ και } (OB) = \rho + (OK)$$

$$\text{Άρα } (OA) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1 \text{ και } (OB) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$$