



Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

**ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>**

- A.** i) Να δώσετε τον ορισμό της συνέχειας μιας συνάρτησης  $f$  στο πεδίο ορισμού της  $A$ . *Μονάδες 2*
- ii) Πότε μια συνάρτηση  $f$  λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα  $\Delta$  του πεδίου ορισμού της; *Μονάδες 3*
- B.** Να γράψετε και να αποδείξετε τις ιδιότητες που ισχύουν για την σχετική συχνότητα  $f_i$  της τιμής  $x_i$ ,  $i=1,2,\dots,k$  του δείγματος μεγέθους  $n \geq k$ , των τιμών μιας μεταβλητής  $X$ . *Μονάδες 10*
- Γ.** Να χαρακτηρίσετε ως Σωστή (Σ) ή Λάθος (Λ) καθεμία από τις επόμενες προτάσεις.
1. Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση μόνο ποιοτικών δεδομένων. *Μονάδες 2*
  2. Αν για τις αθροιστικές συχνότητες  $N_i$ ,  $i=1,2,3,4,5$  ενός δείγματος τιμών  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$  της μεταβλητής  $X$ , ισχύει  $N_i = 4 \cdot i^2 + 2i$ , τότε το μέγεθος του δείγματος είναι  $n=110$ . *Μονάδες 2*
  3. Σε ομαδοποιημένα δεδομένα, το εύρος ισούται με την διαφορά της κεντρικής τιμής της πρώτης κλάσης από την κεντρική τιμή της τελευταίας κλάσης. *Μονάδες 2*
  4. Σε κανονική κατανομή ισχύει:  $\bar{x} = \delta$ , όπου  $\bar{x}$  είναι η μέση τιμή και  $\delta$  η διάμεσος της. *Μονάδες 2*
  5. Αν για τις πιθανότητες  $P(A)$ ,  $P(B)$  δύο ενδεχομένων  $A$ ,  $B$  ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  είναι  $P(A) \leq P(B)$  τότε ισχύει πάντα  $A \subseteq B$ . *Μονάδες 2*

**ΘΕΜΑ 2°**

Έστω  $t_1, t_2, \dots, t_{100}$  ένα δείγμα τιμών μιας μεταβλητής  $T$  με μέση τιμή  $\bar{t}$ , τυπική απόκλιση  $s \neq 0$  και η συνάρτηση  $F$  με τύπο

$$F(x) = \begin{cases} \frac{(\bar{t} - 2s)(x - 4)}{\sqrt{x} - 2}, & \text{αν } x \geq 0 \text{ και } x \neq 4 \\ -24 \cdot s, & \text{αν } x = 4 \end{cases}$$

η οποία είναι συνεχής στο διάστημα  $A = [0, +\infty)$ .

**α)** Να αποδείξετε ότι για  $x \neq 4$  ο τύπος της συνάρτησης  $F$  είναι

$$F(x) = (\bar{t} - 2s)(\sqrt{x} + 2) \quad \text{Μονάδες 7}$$

**β)** Να εξετάσετε αν είναι ομοιογενές το δείγμα των τιμών  $t_1, t_2, \dots, t_{100}$  της μεταβλητής  $T$ . Μονάδες 10

**γ)** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ( $\epsilon$ ) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $g$  με τύπο  $g(x) = \frac{F(x)}{\bar{t} - 2s}$  στο σημείο της  $A\left(\frac{1}{4}, g\left(\frac{1}{4}\right)\right)$ .

Μονάδες 8

**ΘΕΜΑ 3°**

Ο κυβισμός των κινητήρων  $X_i$  σε κυβικά εκατοστά (κ.εκ.), ενός δείγματος 4.000 αυτοκινήτων, ακολουθεί κανονική κατανομή.

Στο παραπάνω δείγμα βρέθηκαν 100 αυτοκίνητα με κυβισμό μικρότερο από 1.400κ.εκ. και 3.360 αυτοκίνητα με κυβισμό μικρότερο από 2.000κ.εκ.

**α)** Να βρείτε τη μέση τιμή  $\bar{x}$ , την τυπική απόκλιση  $s$  και να εκτιμήσετε το εύρος  $R$  του κυβισμού των κινητήρων των αυτοκινήτων του δείγματος.

Μονάδες 12

**β)** Επιλέγουμε τυχαία ένα αυτοκίνητο από το δείγμα. Να βρείτε την πιθανότητα να έχει κινητήρα με κυβισμό μικρότερο από 1.200κ.εκ. ή μεγαλύτερο από 2.000κ.εκ.

Μονάδες 7

**γ)** Αν, μετά από επισκευή, ο κυβισμός κάθε κινητήρα αυξηθεί κατά 6%, να βρείτε την μέση τιμή και την διασπορά των νέων τιμών του, και να εκτιμήσετε το εύρος τους.

Μονάδες 6

**ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>**

Δίνονται τα ενδεχόμενα  $K, \Lambda$  ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  με πιθανότητες  $P(K), P(\Lambda)$  αντίστοιχα, όπου  $P(K) \neq 0$ .

α) Η συνάρτηση

$$f(x) = -\frac{1}{2} \cdot [x - P(\Lambda)]^2 + x \cdot P(K), \quad x \in \mathbb{R}$$

έχει στο σημείο  $x_0 \in \mathbb{R}$  μέγιστο το  $\frac{5}{2} \cdot [P(K)]^2$ .

Να αποδείξετε ότι:

- i)  $x_0 = P(K) + P(\Lambda)$
- ii)  $P(\Lambda) = 2 \cdot P(K)$

Μονάδες 6

Μονάδες 4

β) Έστω, επιπλέον, ότι οι παρατηρήσεις:

$$P(\emptyset), P(K), P(\Lambda), P(K \cup \Lambda), P(\Omega), P(\bar{K}), P(\bar{\Lambda}), P(\bar{K} \cap \bar{\Lambda}), P(K \cap \Lambda)$$

έχουν διάμεσο  $\delta = \frac{1}{4}$  και  $P[(K - \Lambda) \cup (\Lambda - K)] = \frac{2}{3}$ .

- i) Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:  $K, \Lambda, K \cap \Lambda, K \cup \Lambda$ .

Μονάδες 12

- ii) Να κάνετε το διάγραμμα συχνοτήτων καθώς και το αντίστοιχο πολύγωνο συχνοτήτων της κατανομής των παραπάνω παρατηρήσεων. Μονάδες 3