



Β' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

Α. Έστω α, β ακέραιοι. Να αποδείξετε την ιδιότητα:

$$\text{Αν } \alpha|\beta \text{ και } \beta|\alpha, \text{ τότε } \alpha = \beta \text{ ή } \alpha = -\beta$$

ΜΟΝΑΔΕΣ 10

Β. Να χαρακτηρίσετε σαν Σωστή (Σ) ή Λάθος (Λ) κάθε μια από τις επόμενες προτάσεις:

α. Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύει η ισοδυναμία: $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta} \Leftrightarrow \det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 0$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 2

β. Η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ είναι $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 2

γ. Όταν μια ευθεία και ένα διάνυσμα είναι παράλληλα, σχηματίζουν ίσες γωνίες με τον άξονα $x'x$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 2

δ. Οι ασύμπτωτες της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ είναι οι ευθείες $y = \frac{\alpha}{\beta}x$ και

$$y = -\frac{\alpha}{\beta}x$$

ΜΟΝΑΔΕΣ 2

ε. Το υπόλοιπο της διαίρεσης του -92 με το 5 είναι 2 .

ΜΟΝΑΔΕΣ 2

Ϛ. Να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ με

$$x_1 \neq x_2 \text{ έχει εξίσωση } y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ και η παραβολή $y^2 = 16x$.

α. Να βρείτε τις εστίες της έλλειψης και την εστία της παραβολής. **ΜΟΝΑΔΕΣ 8**

β. Έστω E', E οι εστίες της έλλειψης (η E' να έχει αρνητική τετμημένη).

i) Να γράψετε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων της παραβολής στα σημεία της $M(4, 8)$ και $M'(4, -8)$, και να δείξετε ότι τέμνονται στο E . **ΜΟΝΑΔΕΣ 7**

ii) Να αποδείξετε ότι $\overline{E'M} \cdot \overline{E'M'} = 0$. **ΜΟΝΑΔΕΣ 5**

iii) Αν N είναι το μέσο του $E'M$ να αποδείξετε ότι $EN \perp E'M'$. **ΜΟΝΑΔΕΣ 5**

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν

$$\vec{\alpha} = (1, 8 - \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) \text{ και } \vec{\beta} = (2, \frac{1}{\sqrt{5}} |\vec{\beta}|)$$

α. Να αποδείξετε ότι

i) $|\vec{\beta}| = \sqrt{5}$, **ΜΟΝΑΔΕΣ 6**

ii) $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 5$ **ΜΟΝΑΔΕΣ 5**

β. Να υπολογίσετε τη γωνία $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$ **ΜΟΝΑΔΕΣ 5**

γ. i) Να αποδείξετε ότι $\text{προβ}_{\vec{\beta}} \vec{\alpha} = \vec{\beta}$ **ΜΟΝΑΔΕΣ 5**

ii) Να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ σε δύο κάθετες συνιστώσες από τις οποίες η μια να είναι παράλληλη με το $\vec{\beta}$. **ΜΟΝΑΔΕΣ 4**

ΘΕΜΑ 4^ο

Έστω ο μη αρνητικός ακέραιος n και ο πραγματικός αριθμός $\varphi \in [0, 2\pi)$.

A. Να αποδείξετε ότι $3^n > n^2 + 1$ για κάθε $n \geq 1$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

B. Θεωρούμε την εξίσωση

$$x^2 + y^2 - (4\sigma\upsilon\nu\varphi)x - (4\eta\mu\varphi)y + 4 - 3^n + n^2 = 0 \quad (1)$$

α. Να αποδείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλο C .

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

Να γράψετε τις συντεταγμένες του κέντρου του C , και να βρείτε την ακτίνα του.

ΜΟΝΑΔΕΣ 3

β. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του κέντρου του παραπάνω κύκλου.

ΜΟΝΑΔΕΣ 3

γ. Να αποδείξετε ότι

i) Η εξίσωση (ε): $(\sigma\upsilon\nu\varphi)x + (\eta\mu\varphi)y - 1 = 0$ παριστάνει ευθεία για κάθε $\varphi \in [0, 2\pi)$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 3

ii) Αν η ευθεία ε εφάπτεται του κύκλου C , τότε $n = 0$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 5