



Β' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

Α. Θεωρία: Θεώρημα 2(i) Σχολικό βιβλίο Σελ. 147

Β. α. Σ β. Λ γ. Λ δ. Λ ε. Λ

Γ. Θεωρία.

ΘΕΜΑ 2^ο

α. Η έλλειψη έχει $a = 5$, $b = 3$ και $\gamma^2 = a^2 - b^2 = 4^2$, άρα $\gamma = 4$, οπότε είναι $E'(-4, 0)$, $E(4, 0)$

Η παραβολή έχει παράμετρο $p = 8$ και εστία $(\frac{p}{2}, 0) = (4, 0)$

βi. Από τον τύπο $yy_1 = p(x + x_1)$ βρίσκουμε:

$$\text{Για το } M(4, 8): 8y = 8(x + 4) \Leftrightarrow y = x + 4$$

$$\text{Για το } M(4, -8): -8y = 8(x + 4) \Leftrightarrow y = -x - 4$$

βii. Είναι:

$$\vec{E'M} = (4 + 4, 8 - 0) = (8, 8)$$

και

$$\vec{E'M'} = (4 + 4, -8 - 0) = (8, -8)$$

$$\text{οπότε: } \vec{E'M} \cdot \vec{E'M'} = 64 - 64 = 0$$

$$[\text{τύπος: } \vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)]$$

$$[\text{τύπος: } \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2]$$

β. iii. Είναι: $N\left(\frac{-4 + 4 + 8 + 0}{2}, \frac{8 + 0}{2}\right)$ δηλαδή $N(0, 4)$

[Συντεταγμένες μέσου]

και

$$\lambda_{EN} = \frac{4 - 0}{0 - 4} = -1$$

$$\lambda_{E'M'} = \frac{-8 - 0}{4 + 4} = -1$$

Έτσι, $\lambda_{EN} = \lambda_{E'M'} \Leftrightarrow EN \parallel E'M'$

$$\left[\text{τύπος: } \lambda_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, x_1 \neq x_2 \right]$$

ΘΕΜΑ 3^ο

αί. Είναι:

$$|\vec{\beta}| = \sqrt{2^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{5}}|\vec{\beta}|\right)^2} \quad \left[\text{τύπος: } |\vec{\alpha}| = \sqrt{x^2 + y^2} \right]$$

$$\Leftrightarrow |\vec{\beta}|^2 = 4 + \frac{|\vec{\beta}|^2}{5}$$

$$\Leftrightarrow |\vec{\beta}|^2 = 5$$

$$\Leftrightarrow |\vec{\beta}| = \sqrt{5} \quad [|\vec{\beta}| \geq 0]$$

αίι. Είναι $\vec{\alpha} = (1, 8 - \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})$, $\vec{\beta} = (2, 1)$ και

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 2 + 8 - \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} \quad [\text{τύπος: } \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2]$$

$$\Leftrightarrow 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 10$$

$$\Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 5$$

β. Από το (α) είναι $\vec{\alpha} = (1, 3)$, $\vec{\beta} = (2, 1)$

Έχουμε:

$$\cos(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}} = \frac{2+3}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{5}} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

και επειδή

$$0 \leq (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) \leq \pi$$

προκύπτει

$$(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{4}$$

γί. Αν $\vec{\alpha}_1 = \text{προβ}_{\vec{\beta}} \vec{\alpha} = \vec{\beta}$, τότε $\vec{\alpha}_1 \parallel \vec{\beta}$ και επειδή $\vec{\beta} \neq \vec{0}$ υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$, τέτοιο, ώστε:

$$\vec{\alpha}_1 = \lambda \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha}_1 = (2\lambda, \lambda) \quad (1)$$

Ακόμα:

$$\begin{aligned} \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} &= (\text{προβ}_{\vec{\beta}} \vec{\alpha}) \cdot \vec{\beta} \\ \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} &= \alpha_1 \cdot \vec{\beta} \\ \Leftrightarrow 5 &= 4\lambda + \lambda && [\text{τύπος: } \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2] \\ \Leftrightarrow \lambda &= 1 \end{aligned}$$

και η (1) δίνει:

$$\vec{\alpha}_1 = (2, 1) \Leftrightarrow \text{προβ}_{\vec{\beta}} \vec{\alpha} = \vec{\beta}$$

γii. Η συνιστώσα που είναι παράλληλη στο $\vec{\beta}$ είναι το $\vec{\alpha}_1 = \text{προβ}_{\vec{\beta}} \vec{\alpha} = \vec{\beta} = (2, 1)$.

Εστω $\vec{\alpha}_2$ η δεύτερη συνιστώσα. Έχουμε

$$\vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2 = \vec{\alpha}$$

οπότε:

$$\vec{\alpha}_2 = \vec{\alpha} - \vec{\alpha}_1 \Leftrightarrow \vec{\alpha}_2 = (1, 3) - (2, 1) \Leftrightarrow \vec{\alpha}_2 = (-1, 2)$$

Ωστε, είναι: $\vec{\alpha}_1 = (2, 1) \parallel \vec{\beta}$ και $\vec{\alpha}_2 = (-1, 2)$

ΘΕΜΑ 4^ο

A. (Επαγωγή) Η πρόταση ισχύει για $n = 1$, γιατί $3^1 > 1^2 + 1 \Leftrightarrow 3 > 2$.

Αν υποθέσουμε $3^v > v^2 + 1$ (2) για $v \geq 1$, αρκεί να δείξουμε ότι: $3^{v+1} > (v+1)^2 + 1$ (3)

Πράγματι

$$3^{v+1} = 3^v \cdot 3 \stackrel{(2)}{>} (v^2 + 1) \cdot 3 = (v^2 + 2v^2 + 1) + 2 \stackrel{v \geq 1}{>} (v^2 + 2v + 1) = (v+1)^2 + 1$$

Βα. Έχουμε: $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0 \Leftrightarrow 16\sigma\upsilon\nu^2\phi + 16\eta\mu^2\phi - 4(4 - 3^v + v^2) > 0$

$$\Leftrightarrow 16(\sigma\upsilon\nu^2\phi + \eta\mu^2\phi) - 16 + 4 \cdot 3^v - 4v^2 > 0$$

$$\Leftrightarrow 16 - 16 + 4 \cdot 3^v - 4v^2 > 0$$

$$\Leftrightarrow 4 \cdot (3^v - v^2) > 0 \quad [\text{Δηλαδή: } A^2 + B^2 - 4\Gamma = 4(3^v - v^2)]$$

$$\Leftrightarrow 3^v > v^2 \quad [\text{Από A: } 3^v > v^2 + 1 \Leftrightarrow 3^v > v^2, v \geq 1]$$

Η τελευταία σχέση ισχύει για $v = 0$, και, άρα, από το Α, ισχύει για κάθε μη αρνητικό ακέραιο v . Επομένως, η (1) παριστάνει κύκλο για κάθε v και κάθε φ , όπως αυτά ορίστηκαν.

Το κέντρο του κύκλου είναι το $K \left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2} \right)$ δηλαδή $K(2\sigma\eta\varphi, 2\eta\mu\varphi)$

και η ακτίνα του

$$\rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2} \Leftrightarrow \rho = \frac{\sqrt{4(3^v - v^2)}}{2} \Leftrightarrow \rho = \sqrt{3^v - v^2}$$

β. Έστω x, y οι συντεταγμένες του κέντρου. Έχουμε (από το Β₁):

$$x = 2\sigma\eta\varphi \text{ και } y = 2\eta\mu\varphi \text{ με } \varphi \in [0, 2\pi)$$

άρα, ο γ.τ. του κέντρου είναι ο κύκλος $x^2 + y^2 = 4$ (παραμετρικές εξισώσεις κύκλου)

Γι. Αν υποθέσουμε

$$\sigma\eta\varphi = 0 \text{ και } \eta\mu\varphi = 0,$$

τότε

$$\sigma\eta^2\varphi + \eta\mu^2\varphi = 1 \Leftrightarrow 0 = 1, \text{ άτοπο.}$$

Επομένως, είναι $\sigma\eta\varphi \neq 0$ ή $\eta\mu\varphi \neq 0$ και η (ε) παριστάνει ευθεία για κάθε $\varphi \in [0, 2\pi)$.

ii. Η ε εφάπτεται του κύκλου C αν και μόνον αν: $d(K, \varepsilon) = \rho$

Είναι

$$d(K, \varepsilon) = \rho \Leftrightarrow \frac{|2\sigma\eta^2\varphi + 2\eta\mu^2\varphi - 1|}{\sqrt{\sigma\eta^2\varphi + \eta\mu^2\varphi}} = \sqrt{3^v - v^2} \Leftrightarrow 1 = 3^v - v^2 \Leftrightarrow 3^v = v^2 + 1$$

Η τελευταία ισότητα, λόγω του Α, ισχύει μόνο όταν $v = 0$.