



ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1ο

α) Έστω η συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής στο διάστημα $[α,β]$ με $f(α) ≠ f(β)$.

Να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό $η$ μεταξύ των $f(α)$ και $f(β)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον αριθμός $x_0 ∈ (α,β)$, ώστε $f(x_0) = η$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

β) Έστω οι αριθμοί $α, β, λ ∈ ℝ$ με $α < β$ και η παραγωγίσιμη στο $ℝ$ συνάρτηση f .

Να χαρακτηρίσετε ως Σ (σωστό) ή Λ (λάθος) τις παρακάτω προτάσεις:

i) Αν για την f ισχύει το θεώρημα του Rolle στο διάστημα $[α,β]$, τότε η γραφική της παράσταση έχει σ' ένα τουλάχιστον σημείο της οριζόντια εφαπτομενη.

ii) Υπάρχουν $x_1, x_2 ∈ [α,β]$ με $f(x_1) ≤ f(x) ≤ f(x_2)$, για κάθε $x ∈ [α,β]$.

iii) Αν $f(α) · f(β) > 0$, τότε η f δεν έχει ρίζα στο $(α,β)$.

iv) Ισχύει $\left(\int_a^b f(x) dx \right)' = f(x)$

v) $\int λ · f(x) dx = λ · \int f(x) dx$, για κάθε $λ ∈ \mathbb{V}$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 2Χ5=10

γ) Δίνονται οι μιγαδικοί $z_1, z_2 ≠ 0$ και έστω A, B οι εικόνες τους στο μιγαδικό επίπεδο. Να αποδείξετε ότι:

i) Η εξίσωση $|z - z_1| = |z - z_2|$, παριστάνει την μεσοκάθετο του ευθυγράμμου τμήματος AB .

ΜΟΝΑΔΕΣ 2

ii) Αν $z_2 = i · z_1$ το τρίγωνο OAB είναι ορθογώνιο και ισοσκελές (O είναι η αρχή των αξόνων).

ΜΟΝΑΔΕΣ 3

δ) Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

**ΘΕΜΑ 2ο**

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{και}$$

$$f'(x) = \frac{2}{1 + e^{f(x)}} \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}, \quad \text{με } f'(0) = 1.$$

α) Να αποδείξετε ότι η f :

i) είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

ΜΟΝΑΔΕΣ 3

ii) στέφει τα κοίλα κάτω στο \mathbb{R} .

ΜΟΝΑΔΕΣ 2

iii) έχει μοναδική ρίζα την $x = 0$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 2

β) Να αποδείξετε ότι:

i) ισχύει $f(x) + e^{f(x)} = 2x + 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

ii) Η f αντιστρέφεται και να ορίσετε την αντίστροφή της.

ΜΟΝΑΔΕΣ 2

iii) Οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} έχουν κοινή εφαπτομένη στην αρχή των αξόνων.

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

γ) i) Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f , στο $-\infty$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

ii) Να αποδείξετε ότι η C_f δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται ο μιγαδικός $z \neq -2i$ και θεωρούμε τον $f(z) = \frac{2z}{z + 2i}$.

Έστω ρ το μέτρο και θ ένα όρισμα του μιγαδικού $z + 2i$.

i) Βρείτε τις συντεταγμένες της εικόνας A του μιγαδικού z_0 στο μιγαδικό επίπεδο, για τον οποίο ισχύει $f(z_0) = 3 + i$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 3



ii) Να βρείτε συναρτήσεις των ρ και θ , το μέτρο και ένα όρισμα του μιγαδικού $f(z) - 2$.

ΜΟΝΑΔΕΣ

iii) Αν $|f(z) - 2| = \sqrt{2}$, να αποδείξετε ότι η εικόνα M του z στο μιγαδικό επίπεδο ανήκει σε κύκλο c , του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

ΜΟΝΑΔΕΣ

iv) Αν $\text{Arg}(f(z) - 2) = \frac{\pi}{4}$, να αποδείξετε ότι η εικόνα M του z στο μιγαδικό επίπεδο ανήκει σε μία ημιευθεία ε .

ΜΟΝΑΔΕΣ

v) Να αποδείξετε ότι το σημείο A ανήκει στον κύκλο c και στην ημιευθεία ε .

ΜΟΝΑΔΕΣ

ΘΕΜΑ 4.

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ και έστω οι F, G με

$$F(x) = \int_{1/e}^x f(t) dt, \quad G(x) = \int_{1/e}^x \frac{f(t)}{t^2} dt, \quad x > 0$$

Να αποδείξετε ότι:

α) i) Είναι $f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$. ΜΟΝΑΔΕΣ 2

ii) $-\frac{1}{8} \leq f'(x) \leq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. ΜΟΝΑΔΕΣ 6

β) Για τους πραγματικούς αριθμούς α, β με $0 < \alpha < \beta$ ισχύει:

$$f\left(\frac{1}{\beta}\right) - f\left(\frac{1}{\alpha}\right) \leq \beta - \alpha \quad \text{ΜΟΝΑΔΕΣ 4}$$

γ) Ο τύπος της συνάρτησης g με $g(x) = F(x) + G(x)$, $x > 0$

είναι $g(x) = \ln x + 1$, $x > 0$

ΜΟΝΑΔΕΣ 4



δ) Αν η συνάρτηση h είναι συνεχής στα σημεία $x_1=0$, $x_2=\frac{\pi}{2}$ και

$$h(x) = F(\varepsilon\varphi(x)) + G(\sigma\varphi(x)) \text{ με } 0 < x < \frac{\pi}{2},$$

τότε, είναι σταθερή στο διάστημα $\Delta = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Να βρεθεί η τιμή της h .

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

ε) Το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις γραφικές παραστάσεις των

συναρτήσεων $f'(x)$, $h(x)$ και την ευθεία $x=1$ είναι ίσο με $\frac{1}{2}$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

**ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΕΣ ΕΚΔΟΧΕΣ ΘΕΜΑΤΩΝ****ΘΕΜΑ 2ο (παραλλαγή 2)**

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{και}$$

$$f'(x) = \frac{2}{1 + e^{f(x)}} \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}, \quad \text{με } f'(0) = 1.$$

α) Να αποδείξετε ότι η f

i) είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

ΜΟΝΑΔΕΣ 3

ii) έχει μοναδική ρίζα την $x = 0$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 2

β) Να αποδείξετε ότι: ισχύει $f(x) + e^{f(x)} = 2x + 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

γ) i) Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f , στο $-\infty$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

ii) Να αποδείξετε ότι η C_f δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

δ) Να γίνει ο πίνακας μεταβολών της f και πρόχειρη γραφική της παράσταση.

ΜΟΝΑΔΕΣ 8

ΘΕΜΑ 4.(παραλλαγή 2)

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ και έστω οι F, G με

$$F(x) = \int_{1/e}^x f(t) dt, \quad G(x) = \int_{1/e}^x \frac{f(t)}{t^2} dt, \quad x > 0$$

Να αποδείξετε ότι:

α) i) Είναι $f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 2

iii) $f'(x) \leq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 6



β) Για για κάθε $x > 0$ ισχύει:

$$f\left(\frac{1}{x}\right) - f\left(\frac{1}{\eta\mu x}\right) \leq x - \eta\mu x \quad \text{ΜΟΝΑΔΕΣ 4}$$

γ) Ο τύπος της συνάρτησης g με $g(x) = F(x) + G(x)$, $x > 0$

$$\text{είναι } g(x) = \ln x + 1, \quad x > 0 \quad \text{ΜΟΝΑΔΕΣ 4}$$

δ) Η συνάρτηση h με $h(x) = F(\epsilon\phi(x)) + G(\sigma\phi(x))$

είναι σταθερή στο διάστημα $\Delta = \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Να βρεθεί η τιμή της h .

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

ε) Το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις γραφικές παραστάσεις των

συναρτήσεων $f'(x)$, $h(x)$ και την ευθεία $x=1$ είναι ίσο με $\frac{1}{2}$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

ΘΕΜΑ 4. (παραλλαγή.3)

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ και έστω οι F, G με

$$F(x) = \int_1^x f(t) dt, \quad G(x) = \int_1^x \frac{f(t)}{t^2} dt, \quad x > 0$$

Να αποδείξετε ότι:

α) i) Είναι $f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 2

ii) $-\frac{1}{8} \leq f'(x) \leq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

β) Για τους πραγματικούς αριθμούς α, β με $0 < \alpha < \beta$ ισχύει:

$$f\left(\frac{1}{\beta}\right) - f\left(\frac{1}{\alpha}\right) \leq \beta - \alpha$$

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

γ) Ο τύπος της συνάρτησης g με $g(x) = F(x) + G(x)$, $x > 0$

$$\text{είναι } g(x) = \ln x, \quad x > 0$$

ΜΟΝΑΔΕΣ 4



δ) i) Το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$ τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=e$ είναι ίσο με

$$\ln \sqrt{\frac{1+e^2}{2}}.$$

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

ii)
$$\int_1^e \frac{1}{t(1+t^2)} dt = 1 - \ln \sqrt{\frac{1+e^2}{2}}$$

ΜΟΝΑΔΕΣ 4