

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**
Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ**ΘΕΜΑ 1^ο**

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} a + e^x / x - 2 & x \in (-\infty, 0] \\ \ln(1-x) + 2x^2 & x \in (0, 1) \end{cases}$$

- α) Να προσδιορίσετε την τιμή του a ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0 = 0$
(Μονάδες 7)
- β) Να μελετήσετε τη μονοτονία της f στο διάστημα $(0, 1)$ και να βρείτε, αν υπάρχουν, τα ακρότατά της.
(Μονάδες 7)
- γ) Να εξετάσετε αν υπάρχει σημείο $A(x_0, f(x_0))$ της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f με το $x_0 \in (-\infty, 0]$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο A να είναι παράλληλη προς τον $x'x$.
(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 2^ο

Σε ένα κουτί υπάρχουν 50 μπαλάκια αριθμημένα από το 1 έως το 50. Αν ο Μιχάλης τραβήξει τυχαία έναν αριθμό που διαιρείται με το 2 κερδίζει ένα βιβλίο, ενώ αν τραβήξει έναν αριθμό που διαιρείται με το 5 κερδίζει ένα CD. Να βρείτε την πιθανότητα για καθένα από τα επόμενα ενδεχόμενα.

- A: Θα κερδίσει ένα βιβλίο.
(Μονάδες 4)
- B: Θα κερδίσει ένα βιβλίο ή ένα CD.
(Μονάδες 4)
- Γ: Θα κερδίσει ένα βιβλίο και ένα CD.
(Μονάδες 4)
- Δ: Θα κερδίσει μόνο ένα βιβλίο.
(Μονάδες 4)
- E: Δε θα κερδίσει ούτε βιβλίο ούτε CD.
(Μονάδες 4)

ΘΕΜΑ 3^ο

A. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $[0, +\infty)$ για την οποία ισχύει:

$$4f(x) + 4 = \sqrt{x+12} + f(x) \cdot 2\sqrt{x}. \text{ Να βρεθεί η } f(x).$$

(Μονάδες 10)

B. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με τύπους $f(x) = 2/x$ και $g(x) = (x-1)^2$. Να δείξετε ότι οι εφαπτόμενες των C_f, C_g στο σημείο τομής αυτών είναι κάθετες μεταξύ τους.

**ΘΕΜΑ 4^ο**

Δίνεται η εξίσωση $2x^2 - 2\lambda^2 + \lambda = 3x - 1$ με $\lambda \in (0, 1/2)$. Να δείξετε ότι οι λύσεις της εξίσωσης μπορεί να είναι πιθανότητες κάποιων ενδεχομένων A, B ενός πειράματος τύχης όπου A, B δεν είναι ασυμβίβαστα.

(Μονάδες 20)

ΘΕΜΑ 5^ο

Έστω τα ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω , ώστε $P(A) = 3/4$, $P(B) = 5/6$ και $P(A \cap B) = 2/3$. Να χαρακτηρίσετε τα παρακάτω.

- | | | | |
|--|---|---|-------------|
| 1. $P(B') = 2/3$ | Σ | Λ | (Μονάδες 4) |
| 2. $P(A \cup B) = 1/4$ | Σ | Λ | (Μονάδες 4) |
| 3. $P(A \cap B') = 3/10$ | Σ | Λ | (Μονάδες 4) |
| 4. $P[(A \cap B') \cup (B \cap A')] = 1/4$ | Σ | Λ | (Μονάδες 4) |
| 5. $P(\Omega) = 0$ | Σ | Λ | (Μονάδες 4) |

ΘΕΜΑ 6^ο

Να επιλέξετε τη σωστή από τις παρακάτω προτάσεις:

- Σε κάθε κατανομή το 50% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες της μέσης τιμής και το 50% είναι μεγαλύτερες της μέσης τιμής. (Μονάδες 4)
- Σε κατανομή με θετική συμμετρία ισχύει $\bar{x} < \delta$. (Μονάδες 4)
- Αν $\bar{x} = 3s$ τότε το δείγμα είναι ομοιογενές. (Μονάδες 4)
- Σε κάθε κατανομή ισχύει $0 < f_i < 1$. (Μονάδες 4)
- Σε δύο δείγματα αν είναι $\bar{X}_1 < \bar{X}_2$ τότε $CV_1 > CV_2$. (Μονάδες 4)

Θέμα 7^ο

Έστω $\hat{y} = \hat{a} + 0,7x$ η ευθεία ελαχίστων τετραγώνων για τα παρακάτω ζεύγη τιμών:

x	1	2	4	5
y	2	4	y_3	5

Να βρείτε:

- Την τιμή y_3 (Μονάδες 10)
- Την εκτιμήτρια \hat{a}

**Θέμα 8^ο**

Μια επιχείρηση έχει προς ενοικίαση αυτοκίνητα για τα οποία ο μέσος χρόνος λειτουργίας τους πριν την εμφάνιση της πρώτης βλάβης είναι 12 μήνες με τυπική απόκλιση 3 μήνες.

i) Να αποδείξετε ότι το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

(Μονάδες 10)

ii) Αν η επιχείρηση έχει φροντίσει (βελτιώνοντας τη συντήρηση κλπ.) να μεγαλώσει τον χρόνο λειτουργίας κάθε αυτοκινήτου πριν την εμφάνιση της πρώτης βλάβης κατά c μήνες, να βρείτε την ελάχιστη τιμή του c για την οποία το δείγμα θα ήταν ομοιογενές.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 9^ο

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

(Μονάδες 5)

β) Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

(Μονάδες 7)

γ) Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) όπου $AB = x$ μονάδες μήκους και $A\Gamma = 1$ μονάδα μήκους.

Κατασκευάζουμε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με διαστάσεις x και y , όπου $y = B\Gamma + AB$ ($B\Gamma$, AB τα μήκη των πλευρών του τριγώνου $AB\Gamma$)

Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του ορθ. παρ. ως προς x , όταν $x = \sqrt{3}$.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 10^ο

Συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα συχνοτήτων - σχετικών συχνοτήτων.

x_i	v_i	f_i	$f_i\%$	N_i	F_i	$F_i\%$
1					0,1	
2		0,1		8		
3						50
4						
Σύνολο						

(Μονάδες 20)