

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Β ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1ο ΘΕΩΡΙΑ

ΘΕΜΑ 2ο

i) Οι αριθμοί β, γ είναι πρώτοι μεταξύ τους γιατί η μονάδα γράφεται σαν γραμμικός τους συνδιασμός.

ii) Έστω $\delta = (a, \beta)$ και $\delta' = (a\gamma, \beta)$.

• Αφού δ/a και δ/β είναι $\delta/a\gamma$ και δ/β άρα $\delta/(a\gamma, \beta) = \delta'$, δηλαδή $\delta/\delta' = 1$ (1)

• Αφού $\delta'/a\gamma$ και δ'/β είναι $\delta'/a\gamma$ και $\delta'/a\beta$ οπότε $\delta'/(a\gamma, a\beta) = |a|(\gamma, \beta) = |a|$, άρα δ'/a , έτσι $\delta'/(a, \beta) = \delta$ (2). Οι (1) και (2) δίνουν $\delta = \delta'$.

iii) Η πρόταση $p(0)$: $(a\gamma^0, \beta) = (a, \beta)$ είναι αληθής.

Έστω ότι ισχύει η $p(v)$: $(a\gamma^v, \beta) = (a, \beta)$ (3).

Θα δειχτεί η $p(v+1)$: $(a\gamma^{v+1}, \beta) = (a, \beta)$.

$$\begin{aligned}
 \text{Είναι } (a\gamma^{v+1}, \beta) &= (a\gamma^v\gamma, \beta) \\
 &= ((a\gamma^v)\gamma, \beta) \quad (\text{από την ii) για } a \text{ το } (a\gamma^v)) \\
 &\stackrel{(i)}{=} (a\gamma^v, \beta) \stackrel{(3)}{=} (a, \beta)
 \end{aligned}$$

$$\text{iv) } [a\gamma^v, \beta] = \frac{|a\gamma^v\beta|}{(a\gamma^v, \beta)} = \frac{|\gamma|^v|\alpha\beta|}{(a, \beta)} = |\gamma|^v[\alpha, \beta]$$

ΘΕΜΑ 3ο

A. α) Επειδή $\text{προβ}_a \vec{\beta} \parallel \vec{\alpha}$ με $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$, υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\text{προβ}_a \vec{\beta} = \lambda \vec{\alpha}.$$

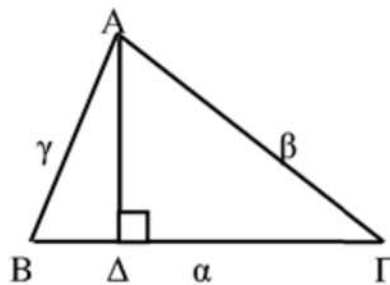
$$\beta) \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \vec{\alpha} \cdot \text{προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \vec{\alpha} \cdot \lambda \vec{\alpha} \Leftrightarrow \lambda = \left(\frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{\vec{\alpha} \cdot \vec{\alpha}} \right) \text{ άρα}$$

$$\text{προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{\beta} = \left(\frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{\vec{\alpha} \cdot \vec{\alpha}} \right) \vec{\alpha}$$

$$\gamma) \vec{v}_1 = \text{προβ}_{\vec{u}} \vec{v} = \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\vec{u} \cdot \vec{u}} \right) \vec{u} = \frac{5}{25} \vec{u} = \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right)$$

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v} \Leftrightarrow \vec{v}_2 = \vec{v} - \vec{v}_1 = \dots$$

B.



$$(\beta \sigma \nu \Gamma) \vec{B\Delta} + (\gamma \sigma \nu \nu) \vec{\Gamma\Delta} = (\beta \sigma \nu \Gamma) \text{προβ}_{\vec{B\Gamma}} \vec{BA} + (\gamma \sigma \nu \nu) \text{προβ}_{\vec{B\Gamma}} \vec{\Gamma A}$$

$$= (\gamma \sigma \nu \nu) \left(\frac{\vec{BA} \cdot \vec{B\Gamma}}{(\vec{B\Gamma})^2} \right) \vec{B\Gamma} + (\beta \sigma \nu \Gamma) \left(\frac{\vec{\Gamma A} \cdot \vec{\Gamma B}}{(\vec{\Gamma B})^2} \right) \vec{\Gamma B}$$

$$= (\beta \sigma \nu \Gamma) \left(\frac{\gamma \alpha \sigma \nu \nu}{\alpha^2} \right) \vec{B\Gamma} + (\gamma \sigma \nu \nu) \left(\frac{\beta \alpha \sigma \nu \Gamma}{\alpha^2} \right) \vec{\Gamma B} = \vec{0}.$$

ή $\beta \sigma \nu \Gamma \cdot \vec{B\Delta} + \gamma \sigma \nu \nu \cdot \vec{\Gamma\Delta} = (\Gamma\Delta) \vec{B\Delta} + (B\Delta) \vec{\Gamma\Delta} = \vec{0}$ γιατί $|\vec{(\Gamma\Delta) \vec{B\Delta}}| = |\vec{(B\Delta) \vec{\Gamma\Delta}}|$ και $(\Gamma\Delta) \vec{B\Delta} \uparrow \downarrow (B\Delta) \vec{\Gamma\Delta}$

ΘΕΜΑ 4ο

Αν $E \left(\frac{p}{2}, 0 \right) = (\pm\gamma, 0)$ είναι η κοινή εστία, τότε:

$$\frac{p}{2} = \pm\gamma = \pm\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} \Leftrightarrow \frac{p^2}{4} = \alpha^2 - \beta^2 \quad (1)$$

i) Η (1) δίνει $\left(\frac{\alpha}{p}\right)^2 - \left(\frac{\beta}{p}\right)^2 = \frac{1}{4}$ οπότε το Μ ανήκει στην ισο-

σκελή υπερβολή $x^2 - y^2 = \frac{1}{4}$

ii) Έστω $E \left(\frac{p}{2}, 0 \right)$ η κοινή εστία και $E' \left(-\frac{p}{2}, 0 \right)$.

Αν (x_1, y_1) είναι σημείο επαφής τότε: $y_1^2 = 2px_1$ (2)

και η εφαπτόμενη έχει εξίσωση: $yy_1 = p(x+x_1)$ (3) η

οποία επαληθεύεται από τις συντεταγμένες του E' , αν και μόνον αν:

$$p \left(-\frac{p}{2} + x_1 \right) = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{p}{2},$$

Από τη (2) προκύπτει $y_1 = \pm p$. Έτσι, τα σημεία επαφής είναι τα

$$A \left(\frac{p}{2}, p \right), \quad B \left(\frac{p}{2}, -p \right)$$

και οι εφαπτόμενες έχουν εξισώσεις

$$y = x + p/2, \quad y = -x - p/2$$

iii) Είναι $\lambda_1 \lambda_2 = -1$ κ.λ.π.

iv) Τα $A\left(\frac{p}{2}, p\right)$, $B\left(\frac{p}{2}, -p\right)$ ανήκουν στην έλλειψη αν και μόνον αν:

$$\frac{p^2}{4\alpha^2} + \frac{p^2}{\beta^2} = 1 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \frac{a^2 - \beta^2}{\alpha^2} + 4 \frac{a^2 - \beta^2}{\beta^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{\gamma^2}{\alpha^2} + 4 \frac{\gamma^2}{(\alpha^2 - \gamma^2)} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\gamma^2}{\alpha^2} + 4 \frac{\frac{\gamma^2}{\alpha^2}}{1 - \frac{\gamma^2}{\alpha^2}} = 1 \quad \left(\text{γιατί } \varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} \right)$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon^2 + 4 \frac{\varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2} = 1 \Leftrightarrow \varepsilon^4 - 6\varepsilon^2 + 1 = 0 \quad (\text{διετράγωνη})$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon^2 = 3 \pm 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \varepsilon^2 = 3 - 2\sqrt{2} \quad \text{γιατί } 0 < \varepsilon < 1$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon = \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1.$$