

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΑΛΓΕΒΡΑ Β ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1ο ΘΕΩΡΙΑ

ΘΕΜΑ 2ο.

$$P(x)=2x^3+\alpha x^2+x+2, \quad Q(x)=\beta x^2+\gamma x+1 \text{ και}$$

$$F(x)=x^3+(2\beta+\gamma)x^2-10x+4\beta,$$

- α) Έχουμε το σύστημα: $\{P(-1)=0, Q(2)=15, F(1)=6\}$
- $$\{\alpha=1, 4\beta+2\gamma=14, 6\beta+\gamma=15\}$$
- $$\{\alpha=1, \beta=2, \text{ και } \gamma=3\}$$

β) $P(x)=Q(x) \Leftrightarrow 2x^3+x^2+x+2=2x^2+3x+1$

$$\Leftrightarrow 2x^3-x^2-2x+1=0 \Leftrightarrow 2x(x^2-1)+x^2-1=0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-1)(2x+1)=0 \Leftrightarrow x=1, x=-1, x=1/2$$

$$P(x) < F(x) \Leftrightarrow 2x^3+x^2+x+2 < x^3+7x^2-10x+8$$

$$\Leftrightarrow x^3-6x^2+11x-6 < 0 \Leftrightarrow x < 1 \text{ ή } 2 < x < 3$$

γ) $2\eta\mu^3x-\eta\mu^2x-2\eta\mu x+1=0 \Leftrightarrow \eta\mu x = 1, \eta\mu x = -1, \eta\mu x = 1/2$ άρα

$$x = 2κπ + \frac{\pi}{2}, x = 2κπ - \frac{\pi}{2}, x = 2κπ + \frac{\pi}{6}, x = 2κπ + \frac{5\pi}{6}, κ \in \mathbb{Z}$$

ΘΕΜΑ 3ο.

$$f(x) = \log(1+e^x) - \alpha - \beta x$$

i) Επειδή $1+e^x > 0$, το πεδίο ορισμού της f είναι το \mathbb{R} .

ii) Για $x = 0$ προκύπτει: $\alpha = \log 2$. Για $x = 1$: $\beta = \log \frac{1+e}{2}$

iii) Με ιδιότητες λογαρίθμων έχουμε διαδοχικά:

$$f(x) = \log(1+e^x) - \alpha - \beta x = \log(1+e^x) - \log 2 - x \log \frac{1+e}{2}$$

$$\begin{aligned}
 &= \log(1+e^x) - \log 2 - \log\left(\frac{1+e}{2}\right)^x \\
 &= \log \frac{1+e^x}{2\left(\frac{1+e}{2}\right)^x} = \log\left(\frac{1+e^x}{(1+e)^x} 2^{x-1}\right)
 \end{aligned}$$

iv) Είναι κατά σειρά:

$$\begin{aligned}
 \log[(1+e^x)2^{x-1}] - f(x) \leq x &\Leftrightarrow \log[(1+e^x)2^{x-1}] - \log\left(\frac{1+e^x}{(1+e)^x} 2^{x-1}\right) \leq x \\
 &\Leftrightarrow \log \frac{(1+e^x)2^{x-1}}{\frac{1+e^x}{(1+e)^x} 2^{x-1}} \leq x \Leftrightarrow \log(1+e)^x \leq x \\
 &\Leftrightarrow x \log(1+e) - x \leq 0 \Leftrightarrow x \log\left(\frac{1+e}{10}\right) \leq 0 \Leftrightarrow x \geq 0
 \end{aligned}$$

γιατί $\log\left(\frac{1+e}{10}\right) < 0$ αφού $\frac{1+e}{10} < 1$

ΘΕΜΑ 4ο.

α) i) Αν a_n είναι η ποσότητα της ουσίας T που περιέχεται στην λίμνη την n -οστή ημέρα, τότε η ακολουθία a_n , $n \in \mathbb{N}^*$ είναι Αριθμητική Πρόοδος με $a_1=3,5$, $\omega=0,5$ και $a_n=a_1+(n-1)\omega = 3,5+(n-1)0,5$, οπότε

$$a_n > 1863 \Leftrightarrow 3,5 + (n-1)0,5 > 1863 \Leftrightarrow n > 3720$$

Άρα το όριο θα ξεπεραστεί την 3721η ημέρα από τη έναρξη της λειτουργίας της βιομηχανίας.

ii) Έχουμε Αριθμητική Πρόοδο με διαφορά $\omega' = 0,5 \cdot 70\% = 0,35$ και $a'_1 = 3,35$. Είναι $a'_{82} = 3,35 + 81 \cdot 0,35 = 32$



β i)	<i>ΜΕΙΩΣΗ ΤΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ ΤΩΝ ΨΑ- ΡΙΩΝ ΚΑΤΑ (β_v) ΚΑΤΑ ΤΗΝ ΔΙΑΡ- ΚΕΙΑ ΤΗΣ ΗΜΕΡΑΣ:</i>	<i>ΠΛΗΘΥΣΜΟΣ (γ_v) ΤΩΝ ΨΑΡΙΩΝ ΠΟΥ ΑΠΟΜΕΝΟΥΝ ΣΤΟ ΤΕΛΟΣ ΤΗΣ ΗΜΕΡΑΣ:</i>
1η ΗΜΕΡΑ	$\beta_1 = 0,01 \cdot A$	$\gamma_1 = A - 0,01 \cdot A = 0,99 \cdot A$
2η ΗΜΕΡΑ	$\beta_2 = 0,01 \quad \gamma_1 = 0,01 \cdot 0,99A$	$\gamma_2 = 0,99 \cdot A - 0,01 \cdot 0,99A = (0,99)^2 A$
3η ΗΜΕΡΑ	$\beta_3 = 0,01 \quad \gamma_2 = 0,01 \cdot (0,99)^2 A$	$\gamma_3 = (0,99)^2 A - 0,01 \cdot (0,99)^2 A = (0,99)^3 A$
.	.	.
.	.	.
(v-1) _η -ΗΜΕΡΑ	.	.
v _η ΗΜΕΡΑ	$\beta_v = 0,01 \quad \gamma_{v-1} = 0,01 \cdot (0,99)^{v-1} A$	$\gamma_{v-1} = (0,99)^{v-1} A$

2ος τρόπος. Για τις ακολουθίες $\beta_v, v \in \mathbb{N}^*$ και $\gamma_v, v \in \mathbb{N}$ με

$$\beta_1 = 0,01 \cdot A, \quad \gamma_0 = A, \quad \text{είναι για κάθε } v \in \mathbb{N} \quad \beta_{v+1} = 0,01 \cdot \gamma_v \quad (1)$$

και για κάθε $v \in \mathbb{N}^*$: $\gamma_v = \gamma_{v-1} - 0,01 \cdot \gamma_{v-1} \Leftrightarrow \gamma_v = 0,99 \cdot \gamma_{v-1}$

$$\Leftrightarrow 0,01 \cdot \gamma_v = 0,01 \cdot 0,99 \cdot \gamma_{v-1}$$

$$(\text{και από (1):}) \quad \Leftrightarrow \beta_{v+1} = 0,99 \cdot \beta_v$$

Άρα, η $\beta_v, v \in \mathbb{N}^*$ είναι Γεωμετρική Πρόοδος με λόγο

$\lambda = 0,99$. Έτσι,

$$\beta_v = \beta_1 \cdot \lambda^{v-1} \Leftrightarrow \beta_v = 0,01 \cdot A \cdot (0,99)^{v-1} \Leftrightarrow \beta_v = 0,01 \cdot (0,99)^{v-1} A$$

β) ii) Είναι:

$$A - \beta_5 = A - 0,01 \cdot (0,99)^4 A = (0,99)^5 A (= \gamma_5) \cong 95.099 \text{ ψάρια.}$$

(2η παραλλαγή)

α i) Αν a_n είναι η ποσότητα της ουσίας που διοχετεύει η βιομηχανία στην λίμνη την n -οστή ημέρα τότε η ακολουθία a_n , $n \in \mathbb{N}^*$ είναι Αριθμητική Πρόοδος με $a_1=3$, $\omega=0,5$. Πρέπει

$$S_n > 1863 \quad \text{ή} \quad \frac{n}{2} [2 \cdot 3 + (n-1) \cdot 0,5] > 1863 \Leftrightarrow n > 81 \quad \text{κ.λ.π.}$$

α ii) $a'_{82} = 2,1 + 81 \cdot 0,35 = \dots$ κ.λ.π.