

ΑΛΓΕΒΡΑ

Β' ΛΥΚΕΙΟΥ - ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ 1ο.

α) i) Να αποδειχτούν οι τύποι

$$\eta\mu^2\alpha = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}, \quad \sigma\upsilon\nu^2\alpha = \frac{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$$

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

ii) Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $22,5^\circ$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

β) i) Να δώσετε τον ορισμό της γεωμετρικής προόδου.

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

ii) Αν $\alpha_n, \beta_n, n \in \mathbb{N}^*$ είναι μια αριθμητική και μία γεωμετρική πρόοδος με διαφορά ω και λόγο λ αντίστοιχα, να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της στήλης Α και δίπλα τον αριθμό της στήλης Β που αντιστοιχεί στην σωστή απάντηση.

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
α) α_{n+1}	1. $\frac{n}{2}(\alpha_1 + \alpha_n)$
β) β_{n+1}	2. $\alpha_1 + (n-1)\omega$
γ) α_n	3. $\beta_1 \lambda^n$
δ) β_n	4. $\alpha_n + \omega$
ε) S_n	5. $\frac{\beta_{n+1}}{\lambda}$

ΜΟΝΑΔΕΣ 5



δ) Να χαρακτηρήσετε σαν Σωστό(Σ) ή Λάθος (Λ) τις προτάσεις i έως v:

i $\ln e = 1$

ii $\log_e = \frac{1}{\ln 10}$

iii $\ln 0 = 1$

iv $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$ με $x > 0$

v $a^x > 0$ με $a > 0$ και $x \in \mathbb{R}$

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται τα πολυώνυμα

$$P(x) = 2x^3 + ax^2 + x + 2, \quad Q(x) = \beta x^2 + \gamma x + 1 \text{ και}$$

$$F(x) = x^3 + (2\beta + \gamma)x^2 - 10x + 4\beta,$$

όπου $a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ και $x \in \mathbb{R}$.

Το $P(x)$ έχει ρίζα το -1 , το υπόλοιπο της διαίρεσης $Q(x):(x-2)$ είναι 15 και η αριθμητική τιμή του $F(x)$ για $x=1$ είναι 6.

α) Ν' αποδείξετε ότι $a=1$, $\beta=2$, και $\gamma=3$

ΜΟΝΑΔΕΣ 7

β) Να λύσετε:

i) την εξίσωση $P(x) = Q(x)$

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

ii) την ανίσωση $P(x) < F(x)$

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

iii) την εξίσωση $2\eta\mu^3 x - \eta\mu^2 x - 2\eta\mu x + 1 = 0$

ΜΟΝΑΔΕΣ 7

**ΘΕΜΑ 3ο.**

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(0) = f(1) = 0$ και τύπο

$$f(x) = \log(1 + e^x) - \alpha - \beta x, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

i) Ν' αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της f είναι το \mathbb{R} .

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

ii) Να βρείτε τις τιμές των α , β .

ΜΟΝΑΔΕΣ 7

iii) Ν' αποδείξετε ότι $f(x) = \log \left[\frac{1 + e^x}{(1 + e)^x} \cdot 2^{x-1} \right]$

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

iv) Να λύσετε την ανίσωση $\log \left[(1 + e^x) \cdot 2^{x-1} \right] - f(x) \leq x$

ΜΟΝΑΔΕΣ 7

ΘΕΜΑ 4ο.

Η ποσότητα μιας τοξικής ουσίας T στα νερά μιας λίμνης ανέρχεται σε 3 μονάδες και αρχίζει να αυξάνεται με την έναρξη της λειτουργίας μιας παραλίμνιας βιομηχανίας κατά 0,5 μονάδες ημερησίως.

A. i) Να βρείτε σε πόσες ημέρες η ποσότητα της ουσίας T θα ξεπεράσει το όριο των 1863 μονάδων.

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

ii) Αν το 30% της ποσότητας της ουσίας T που διοχετεύεται από την βιομηχανία στην λίμνη κάθε ημέρα, αδρονοποιείται κατά την διάρκειά της, πόση θα παραμείνει ενεργή στο τέλος της 82ης ημέρας;

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

B. Ο πληθυσμός $A=100$ χιλιάδες μιας ποικιλίας ψαριών της λίμνης, αρχίζει να μειώνεται αμέσως μετά την έναρξη της λειτουργίας της βιομηχανίας με ρυθμό 1% ημερησίως. Έστω β_n ο αριθμός των ψαριών που πεθαίνουν κατά την διάρκεια της n -οστής ημέρας.

i) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία (β_n) , $n \in \mathbb{N}^*$ είναι γεωμετρική πρόοδος με γενικό όρο:

$$\beta_n = 0,01 \cdot A \cdot (0,99)^{n-1} \text{ χιλιάδες}$$

ΜΟΝΑΔΕΣ 10

ii) Να βρείτε τον πληθυσμό των ψαριών που απέμειναν στην λίμνη ύστερα από $n=5$ ημέρες.

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

ΘΕΜΑ 4ο. (2η παραλλαγή)

Μια παραλίμνια βιομηχανία διοχέτευσε την πρώτη ημέρα της λειτουργίας της ποσότητα 3 μονάδων μιας τοξικής ουσίας T στα νερά της λίμνης και στη συνέχεια αυξάνει την ποσότητα που διοχετεύει κατά 0,5 μονάδες ημερησίως.

- A. i) Να βρείτε σε πόσες ημέρες η ποσότητα της ουσίας T θα ξεπεράσει το όριο των 1863 μονάδων.
(δίνεται $29929 = 173^2$ ή $7482,25 = 86,5^2$).

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

- ii) Αν το 30% της ποσότητας της ουσίας T που διοχετεύεται από τη βιομηχανία στη λίμνη κάθε ημέρα, αδρονοποιείται κατά τη διάρκειά της, πόση θα παραμείνει ενεργή στο τέλος της 81ης ημέρας;

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

- B. Ο πληθυσμός $A=100$ χιλιάδες μιας ποικιλίας ψαριών της λίμνης, αρχίζει να μειώνεται αμέσως μετά την έναρξη της λειτουργίας της βιομηχανίας με ρυθμό 1% ημερησίως. Έστω β_n ο αριθμός των ψαριών που πεθαίνουν κατά την διάρκεια της n -οστής ημέρας.

- i) N' αποδείξτε ότι η ακολουθία (β_n) , $n \in \mathbb{N}^*$ είναι γεωμετρική πρόοδος της οποίας να βρείτε το γενικό όρο.

ΜΟΝΑΔΕΣ 10

- ii) Να βρείτε τον πληθυσμό των ψαριών που απέμειναν στην λίμνη ύστερα από $n=5$ ημέρες.

ΜΟΝΑΔΕΣ 4