ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Β΄ ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΣΑΒΒΑΤΟ 24 ΙΟΥΝΙΟΥ 2000
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1. θεωρία, σελ. 84
Α.2. θεωρία, σελ. 85
Α.3. θεωρία, σελ. 83
Β.1. Σωστό το Γ
Β.2. $\alpha \to 3$, $\beta \to 1$
Β.3. $\alpha \to$ Σωστό $\beta \to$ Λάθος $\gamma \to$ Λάθος

ΘΕΜΑ 2ο

α. Αν $\upsilon = 0$ τότε $\alpha = 6\kappa$ πολλαπλάσιο του 2 απορρίπτεται
Αν $\upsilon = 1$ τότε $\alpha = 6\kappa + 1 = 2(3\kappa) + 1 = 3(2\kappa) + 1$
Δεν είναι πολλαπλάσιο του 2 ή του 3
Αν $\upsilon = 2$ τότε $\alpha = 6\kappa + 2 = 2(3\kappa + 1)$ πολλαπλάσιο του 2 απορρίπτεται.
Αν $\upsilon = 3$ τότε $\alpha = 6\kappa + 3 = 3(2\kappa + 1)$ πολλαπλάσιο του 3 απορρίπτεται.
Αν $\upsilon = 4$ τότε $\alpha = 6\kappa + 4 = 2(3\kappa + 2)$ πολλαπλάσιο του 2 απορρίπτεται.
Αν $\upsilon = 5$ τότε $\alpha = 6\kappa + 5 = 2(3\kappa + 2) + 1 = 3(3\kappa + 1) + 2$
Δεν είναι πολλαπλάσιο του 2 ή του 3
Άρα $\alpha = 6\kappa + 1$ ή $\alpha = 6\kappa + 5$, $\kappa \in Z$

β. i. Αν $\alpha = 6\kappa + 1$ έχουμε:
$\alpha^2 = (6\kappa+1)^2 = 36\kappa^2 + 12\kappa + 1 = 3(12\kappa^2 + 4\kappa) + 1 = 3\mu + 1, \quad \mu \in Z$

ii. Αν $\alpha = 6\kappa + 5$ έχουμε:
$\alpha^2 = (6\kappa+5)^2 = 36\kappa^2 + 60\kappa + 25 = 36\kappa^2 + 60\kappa + 24 + 1 =$
$= 3(12k^2 + 20k + 8) + 1 = 3\lambda + 1, \quad \lambda \in Z$

γ. Έστω x, y δύο τέτοιοι ακέραιοι. Τότε:
$x^2 = 3\mu_1 + 1, \quad \mu_1 \in Z$
$y^2 = 3\mu_2 + 1, \quad \mu_2 \in Z$
οπότε:
$x^2 - y^2 = 3\mu_1 + 1 - (3\mu_2 + 1) = 3\mu_1 + 1 - 3\mu_2 - 1 = 3(\mu_1 - \mu_2)$,
πολλαπλάσιο του 3.

ΘΕΜΑ 3ο

α. Δίνονται: $2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta} = (4, -2)$ (1) και $\vec{\alpha} - 3\vec{\beta} = (-7, 8)$ (2)
Προσθέτουμε τις σχέσεις (1) και (2) κατά μέλη οπότε:

$3\vec{\alpha}=(4,-2)+(-7,8)\Leftrightarrow 3\vec{\alpha}=(-3,6)\Leftrightarrow \vec{\alpha}=(-1,2)$

Οπότε η (1) γίνεται:

$2(-1,2)+3\vec{\beta}=(4,-2)\Leftrightarrow 3\vec{\beta}=(4,-2)-(-2,4)\Leftrightarrow$

$3\vec{\beta}=(6,-6)\Leftrightarrow \vec{\beta}=(2,-2)$

β. Έχουμε:

$$\left(\kappa\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)\perp\left(2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}\right)\Leftrightarrow\left(\kappa\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)\left(2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}\right)=0\Leftrightarrow$$

$$2\kappa\vec{\alpha}^{\,2}+3\kappa\vec{\alpha}\vec{\beta}+2\vec{\alpha}\vec{\beta}+3\vec{\beta}^{\,2}\Leftrightarrow$$

$$2\kappa(1+4)+3\kappa(-2-4)+2(-2-4)+3(4+4)\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow\kappa=\frac{3}{2}$$

γ. Έστω $\vec{\gamma}=\vec{\gamma}_1+\vec{\gamma}_2$ (1)

όπου: $\vec{\gamma}_1 // \vec{\alpha}\Leftrightarrow\vec{\gamma}=\lambda\vec{\alpha}$ (2) και

$\vec{\gamma}_2\perp\vec{\alpha}\Leftrightarrow\vec{\gamma}_2\vec{\alpha}=0$ (3)

Η σχέση (1) λόγω της (2) γίνεται:

$\vec{\gamma}=\lambda\vec{\alpha}+\vec{\gamma}_2\Leftrightarrow\vec{\gamma}_2=\vec{\gamma}-\lambda\vec{\alpha}$ (4)

Οπότε η σχέση (3) λόγω της (4) μας δίνει:

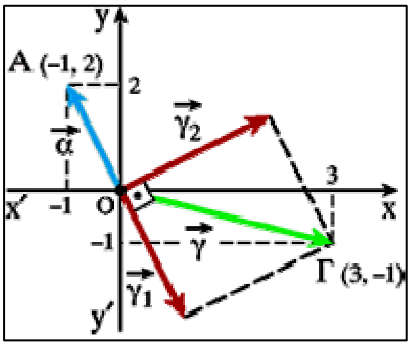
$\left(\vec{\gamma}-\lambda\vec{\alpha}\right)\vec{\alpha}=0\Leftrightarrow\vec{\alpha}\vec{\gamma}-\lambda\vec{\alpha}^{\,2}=0\Leftrightarrow$

$-5-\lambda\cdot 5=\vec{\alpha}\Leftrightarrow\lambda=-1$

Τελικά από την (4) έχουμε:

$\vec{\gamma}_2=(3,-1)+(-1,2)=(2,1)$

από την (2) έχουμε: $\vec{\gamma}_1=\vec{\alpha}=(1,-2)$



ΘΕΜΑ 4ο

α. Δίνεται η εξίσωση:

$(\lambda-1)x+(\lambda+1)y-\lambda-3=0$ (1) $\lambda\in R$

Οι αριθμοί $\lambda-1$, $\lambda+1$, δε μηδενίζονται ταυτόχρονα για καμιά τιμή του $\lambda\in R$ αφού το σύστημα:

$$\left.\begin{matrix}A=\lambda-1=0\\ \text{και}\\ B=\lambda+1=0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}\lambda=1\\ \text{και}\\ \lambda=-1\end{matrix}\right\}\text{είναι αδύνατο}.$$

Άρα η (1) παριστάνει ευθεία για κάθε $\lambda\in R$.

Για λ = 1 η (1) γίνεται:

$\varepsilon_1 : 2y - 4 = 0 \Leftrightarrow \varepsilon_1 : y = 2$

Για λ = -1 η (1) γίνεται:

$\varepsilon_2 : 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow \varepsilon_2 : x = -1$

Οι ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνονται στο σημείο Φ(-1, 2)

Παρατηρούμε ότι για (x, y) = (-1,2) η (1) επαληθεύεται ανεξαρτήτως του $\lambda \in R$ αφού: (λ-1)(-1) + (λ +1)2 –λ -3 = -λ +1 + 2λ +2 –λ -3 = 0

Επομένως η (1) παριστάνει το σύνολο των ευθειών (φωτεινών ακτινών)που διέρχονται από το σημείο Φ(-1, 2) που είναι η θέση του φάρου Φ

β. Η φωτεινή ακτίνα που διέρχεται από το Κ έχει προφανώς εξίσωση: y = 2

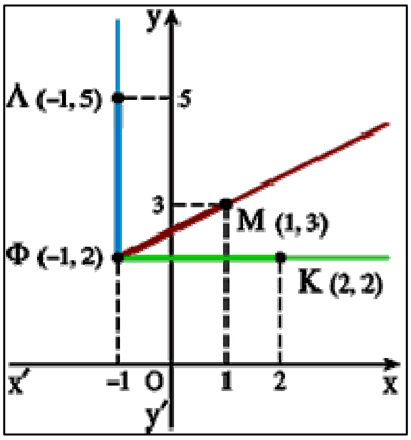
(Αφού $y_Φ = y_Κ = 2$) Η φωτεινή ακτίνα που διέρχεται από το Λ έχει εξίσωση:

x = -1 (Αφού $x_Φ = x_Λ = -1$)

Για ΦΜ έχουμε: $\lambda_{ΦΜ} = \dfrac{3-2}{1-(-1)} = \dfrac{1}{2}$.

Άρα η ακτίνα ΦΜ έχει εξίσωση:

$$ΦΜ : y - 3 = \frac{1}{2}(x-1) \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow ΦΜ : x - 2y + 5 = 0$$



γ. Το Κ απέχει απόσταση από τη ΦΜ:

$$d_1 = d(K, ΦΜ) = \frac{|2 - 2\cdot 2 + 5|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5} μμ$$

Το Λ απέχει απόσταση από τη ΦΜ:

$$d_2 = d(Λ, ΦΜ) = \frac{|-1 - 2\cdot 5 + 5|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{6}{\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{5} μμ$$

Προφανώς

$$\frac{6\sqrt{5}}{5} = d_2 > d_1 = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

άρα το πλοίο Κ βρίσκεται πλησιέστερα στη φωτεινή ακτίνα που διέρχεται από το πλοίο Μ

δ. Το ζητούμενο εμβαδόν είναι το εμβαδόν του τριγώνου ΦΛΜ. Οπότε:

$$E_{ΦΛΜ} = \frac{1}{2}(ΦΜ)\cdot d(λ, ΦΜ) = \frac{1}{2}\sqrt{2^2 + 1^2}\cdot \frac{6\sqrt{5}}{5} = 3τμ$$

(μμ = μονάδες μήκους , τ.μ.= τετραγωνικές μονάδες)