

**ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Β΄ ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**  
**ΣΑΒΒΑΤΟ 24 ΙΟΥΝΙΟΥ 2000**  
**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ :**  
**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

**ΘΕΜΑ 1ο**

**A.1.** Να γράψετε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο  $K(x_0, y_0)$  και ακτίνα  $\rho$ .  
**Μονάδες 2**

**A.2.** Πότε η εξίσωση  $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$  παριστάνει κύκλο; Ποιο είναι το κέντρο του και ποια η ακτίνα του;  
**Μονάδες 4,5**

**A.3.** Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη  $\varepsilon$  του κύκλου  $C: x^2 + y^2 = \rho^2$  σε ένα σημείο του  $A(x_1, y_1)$  έχει εξίσωση  $xx_1 + yy_1 = \rho^2$ .  
**Μονάδες 6**

**B.1.** Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση. Δίνεται κύκλος  $x^2 + y^2 = 10$  και το σημείο του  $M(1, -3)$ . Η εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο  $M$  έχει εξίσωση:  
**A.**  $x + 3y = 10$ ,  
**B.**  $5x - y = 8$   
**Γ.**  $x - 3y = 10$ ,  
**Δ.**  $3x + 2y = 3$ ,  
**E.**  $\frac{1}{2}x + y = 5$   
**Μονάδες 4**

**B.2.** Στη Στήλη Α δίνονται οι εξισώσεις που παριστάνουν κύκλους και στη Στήλη Β τα κέντρα των κύκλων και οι ακτίνες τους. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της Στήλης Α και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της Στήλης Β που αντιστοιχεί στη σωστή εξίσωση του κύκλου.

| Στήλη Α                                 | Στήλη Β                        |
|---|--------------------------------|
| <b>α.</b> $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$ | <b>1.</b> $K(0, -1), \rho = 2$ |
| <b>β.</b> $x^2 + (y + 1)^2 = 4$         | <b>2.</b> $K(3, -2), \rho = 1$ |
|   | <b>3.</b> $K(3, -2), \rho = 4$ |

**Μονάδες 4**

**B.3.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

- α. Το σημείο  $(1, -1)$  ανήκει στον κύκλο  $x^2 + y^2 = 2$ .  
β. Ο κύκλος  $x^2 + y^2 = 4$  και η ευθεία  $y = 2x$  εφάπτονται.  
γ. Η εξίσωση  $x^2 + y^2 + \lambda^2 = 0$ , όπου  $\lambda$  πραγματικός αριθμός, είναι εξίσωση κύκλου.

**Μονάδες 4,5**

### ΘΕΜΑ 2ο

Θεωρούμε τους ακέραιους της μορφής  $a = 6k + v$  με  $0 \leq v < 6$  και  $k$  ακέραιος.

Να δείξετε ότι:

- α. οι παραπάνω ακέραιοι  $a$  που δεν είναι πολλαπλάσια του 2 ή του 3 παίρνουν τη μορφή  $a = 6k + 1$  ή τη μορφή  $a = 6k + 5$ , όπου  $k$  ακέραιος

**Μονάδες 10**

- β. το τετράγωνο κάθε ακέραιου αριθμού της μορφής του ερωτήματος (α) μπορεί να πάρει τη μορφή:  $a^2 = 3u + 1$ , όπου  $u$  ακέραιος

**Μονάδες 10**

- γ. η διαφορά των τετραγώνων δύο ακεραίων του ερωτήματος (α) είναι πολλαπλάσιο του 3.

**Μονάδες 5**

### ΘΕΜΑ 3ο

Για τα διανύσματα  $\vec{\alpha}$ ,  $\vec{\beta}$  ισχύουν οι σχέσεις  $2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta} = (4, -2)$  και  $\vec{\alpha} - 3\vec{\beta} = (-7, 8)$ .

- α. Να δείξετε ότι  $\vec{\alpha} = (-1, 2)$  και  $\vec{\beta} = (2, -2)$ .

**Μονάδες 7**

- β. Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός  $k$ , ώστε τα διανύσματα  $k\vec{\alpha} + \vec{\beta}$  και  $2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$  να είναι κάθετα.

**Μονάδες 8**

- γ. Να αναλυθεί το διάνυσμα  $\vec{\gamma} = (3, -1)$  σε δύο κάθετες συνιστώσες, από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη στο διάνυσμα  $\vec{\alpha}$ .

**Μονάδες 10**

### ΘΕΜΑ 4ο

Σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων  $Oxy$ , η εξίσωση ευθείας  $(\lambda - 1)x + (\lambda + 1)y - \lambda - 3 = 0$ , όπου  $\lambda$  πραγματικός αριθμός, περιγράφει τη φωτεινή ακτίνα που εκπέμπει ένας περιστρεφόμενος φάρος  $\Phi$ .

- α. Να βρείτε τις συντεταγμένες του φάρου  $\Phi$ .

**Μονάδες 8**

- β. Τρία πλοία βρίσκονται στα σημεία  $K(2, 2)$ ,  $\Lambda(-1, 5)$  και  $M(1, 3)$ . Να βρείτε τις εξισώσεις των φωτεινών ακτίνων που διέρχονται από τα πλοία  $K$ ,  $\Lambda$  και  $M$ .

**Μονάδες 4,5**

γ. Να υπολογίσετε ποιο από τα πλοία Κ και Λ βρίσκεται πλησιέστερα στη φωτεινή ακτίνα που διέρχεται από το πλοίο Μ.

**Μονάδες 6**

δ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της θαλάσσιας περιοχής που ορίζεται από το φάρο Φ και τα πλοία Λ και Μ.

**Μονάδες 6,5**

**ΔΙΕΥΚΡΙΝΗΣΗ:**

**ΘΕΜΑ 3.β.** Αντί της έκφρασης:  $2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$  να γραφεί:  $2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$ .

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!**