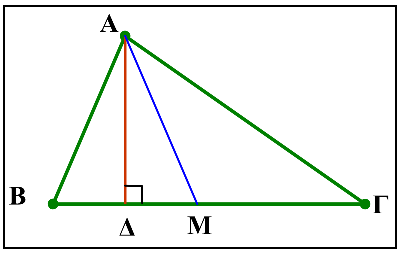
# ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Β΄ ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
# ΣΑΒΒΑΤΟ 10 ΙΟΥΝΙΟΥ 2000
# ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ: ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

## ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

## ΘΕΜΑ 1ο

**Α1.** Πρώτο θεώρημα διαμέσων, σελίδα 218 – 219 (σχολικό βιβλίο)

**Α2.** Είναι $ΑΓ^2 - ΑΒ^2 = 2ΒΓ\cdot ΔΜ$, όπου ΔΜ η προβολή της διαμέσου $μ_α$ πάνω στη ΒΓ




**Β1.** Σωστή η Γ

**Β2.** Σωστή η Ε. 3

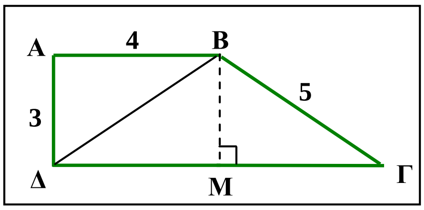
## ΘΕΜΑ 2ο

**α.** Έστω Μ η προβολή του Β στην ΔΓ. Τότε, η ΜΓ είναι η προβολή της ΒΓ πάνω στη ΓΔ. Το ΑΒΜΔ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, άρα είναι:

ΒΜ = ΑΔ = 3

Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΜΓ, έχουμε:

$ΜΓ^2 = ΒΓ^2 - ΒΜ^2 \Leftrightarrow ΜΓ^2 = 25 - 9 = 16 \Leftrightarrow ΜΓ = 4$




**β.** $E_{ΑΒΓΔ} = \frac{ΑΒ+ΔΓ}{2}\cdot ΑΔ = \frac{4+8}{2}\cdot 3 = 18$ τ.μ

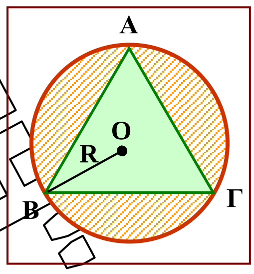
**γ.** $E_{ΔΒΓ} = \frac{1}{2}ΔΓ\cdot ΒΜ = \frac{1}{2}\cdot 8\cdot 3 = 12$ τ.μ

## ΘΕΜΑ 3ο

**α.**

$$ΑΒ = ΒΓ = ΑΓ = λ_3 = R\sqrt{3} = 15 \Leftrightarrow R = \frac{15}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow$$

$$R = \frac{15\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow R = 5\sqrt{3}$$



**β.** $E_{(O,R)} = \pi R^2 = \pi\left(5\sqrt{3}\right)^2 \Leftrightarrow E_{(O,R)} = 75\pi$

**γ.** $E_{AB\Gamma} = \dfrac{AB^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \dfrac{15^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow E_{AB\Gamma} = \dfrac{225\sqrt{3}}{4}$

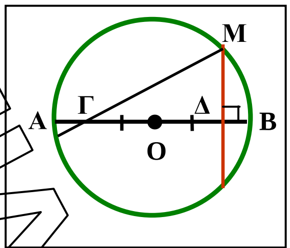
**δ.** Έστω το εμβαδόν του ζητούμενου χωρίου. Τότε είναι:

$$E = E_{(O,R)} - E_{AB\Gamma} = 75\pi - \frac{225\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow E = 75\left(\pi - \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$$

## ΘΕΜΑ 4$^{o}$

**α.** Το ΟΔ είναι απόστημα της χορδής ΜΖ, οπότε ΜΔ =ΔΖ.
Είναι:
$M\Delta \cdot \Delta Z = R^2 - O\Delta^2 \Leftrightarrow M\Delta^2 = R^2 - O\Delta^2$
αφού το Δ είναι εσωτερικό σημείο του (O,R).
Ομοίως είναι:
$\Delta A \cdot \Delta B = R^2 - O\Delta^2$
Οπότε είναι τελικά:
$M\Delta^2 = A\Delta \cdot \Delta B$

**β.** Το Γ είναι εσωτερικό σημείο του (O,R) άρα είναι $M\Gamma \cdot \Gamma E = R^2 - O\Gamma^2$ και αφού είναι ΟΓ = ΟΔ, έχουμε:
$M\Gamma \cdot \Gamma E = R^2 - O\Delta^2$
Οπότε από το ερώτημα (α) ισχύει:
$M\Gamma \cdot \Gamma E = M\Delta \cdot \Delta Z = R^2 - O\Delta^2$




**γ.** Στο τρίγωνο ΜΓΔ, η ΜΟ είναι διάμεσος, οπότε από το πρώτο θεώρημα διαμέσων έχουμε:

$$M\Gamma^2 + M\Delta^2 = 2MO^2 + \frac{\Gamma\Delta^2}{2} = 2R^2 + \frac{(2O\Delta)^2}{2} =$$
$$2R^2 + 2O\Delta^2 = 2(R^2 + O\Delta^2)$$

**δ.** Είναι:

$$\frac{M\Gamma}{\Gamma E} + \frac{M\Delta}{\Delta Z} = \frac{M\Gamma^2}{M\Gamma \cdot \Gamma E} + \frac{M\Delta^2}{M\Delta \cdot \Delta Z}$$

Από το ερώτημα (β) είναι:
$M\Gamma \cdot \Gamma E = M\Delta \cdot \Delta Z = R^2 - O\Delta^2$
Οπότε έχουμε:

$$\frac{M\Gamma}{\Gamma E} + \frac{M\Delta}{\Delta Z} = \frac{M\Gamma^2 + M\Delta^2}{R^2 - O\Delta^2} = \frac{2(R^2 + O\Delta^2)}{R^2 - O\Delta^2}$$

από το ερώτημα (γ)

Άλλος τρόπος απόδειξης του ερωτήματος (δ) προκύπτει αν αντικαταστήσουμε στο δεύτερο μέλος τις σχέσεις από τα προηγούμενα ερωτήματα. Είναι:

$$\frac{2(R^2+O\Delta^2)}{R^2-O\Delta^2}=\frac{M\Gamma^2+M\Delta^2}{M\Gamma\cdot\Gamma E}=\frac{M\Gamma}{\Gamma E}+\frac{M\Delta^2}{M\Gamma\cdot\Gamma E}=\frac{M\Gamma}{\Gamma E}+\frac{M\Delta^2}{M\Delta\cdot\Delta Z}=\frac{M\Gamma}{\Gamma E}+\frac{M\Delta}{\Delta Z}$$