ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Β΄ ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 22 ΙΟΥΝΙΟΥ 2000
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ: ΑΛΓΕΒΡΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1. $\alpha_\nu = \alpha_1(\nu - 1)\omega$

Α.2. $2\beta = \alpha + \gamma$

Α.3. Θεωρία σχολικού βιβλίου, σελ. 103

Β.1. $\alpha \rightarrow 3$, $\beta \rightarrow 4$, $\gamma \rightarrow 1$

Β.2. α → Σωστό , β → Λάθος, γ → Σωστό

Β.3. Σωστή η Β

ΘΕΜΑ 2ο

α. Αφού το 1 είναι ρίζα του P(x), ισχύει:

$P(1) = 0 \Leftrightarrow \alpha + \beta - 1 - 3 - 2\beta + 6 = 0 \Leftrightarrow \alpha - \beta = -2 \ (1)$

Ακόμη πρέπει $P(-1) = 2$, αφού το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) με το x +1 είναι ίσο με 2. Άρα είναι:

$P(1) = 2 \Leftrightarrow \alpha + \beta - 1 + 3 - 2\beta + 6 = 2 \Leftrightarrow -\alpha - \beta = -6 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 6 \ (2)$

Οπότε , από (1) και (2) έχουμε:

$$\begin{cases} \alpha - \beta = -2 \\ \alpha + \beta = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha = 4 \\ \alpha + \beta = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 4 \end{cases}$$

β. Για α = 2 και β = 4 το $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 3x - 2$.

Είναι: $P(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^3 + 3x^2 - 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow 2(x^3 - 1) + 3x(x - 1) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2(x-1)(x^2 + x + 1) + 3x(x-1) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-1)(2x^2 + 2x + 2 + 3x) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-1)(2x^2 + 5x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $2x^2 + 5x + 2 = 0$

Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι Δ = 9, άρα $x_{1,2} = \dfrac{-5 \pm 3}{4}$

δηλαδή είναι x = -2 ή $x = -\dfrac{1}{2}$

Συνεπώς, οι ρίζες της P(x) = 0 είναι x = 1, x = -2 ή $x = -\dfrac{1}{2}$

ΘΕΜΑ 3ο

α. Έχουμε:

$f(x) = 2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x - 2\eta\mu^2 x - 4\sigma\upsilon\nu^2 x =$

$= 2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x - 2\eta\mu^2 x - 4(1 - \eta\mu^2 x) = \eta\mu 2x + 2\eta\mu^2 x - 4 =$

$= \eta\mu 2x + 1 - \sigma\upsilon\nu 2x - 4 = \eta\mu 2x - \sigma\upsilon\nu 2x - 3$

Θεωρούμε g(x) = ημ2x - συν2x.

Είναι α = 1, β = -1 , $\rho = \sqrt{2}$, οπότε:

$$\begin{cases} \sigma\upsilon\nu\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \eta\mu\varphi = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

άρα $\varphi = -\dfrac{\pi}{4}$, συνεπώς $g(x) = \sqrt{2}\cdot\eta\mu\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Άρα $f(x) = \sqrt{2}\cdot\eta\mu\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right) - 3$

β. Η f(x) παίρνει τη μέγιστη τιμή της όταν $\eta\mu\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right) = 1$,

και τότε είναι $\max f(x) = \sqrt{2} - 3$.

Εξάλλου είναι:

$$\eta\mu\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \eta\mu\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \eta\mu\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{4} = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x = 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \frac{3\pi}{8}, \kappa \in Z$$

γ. Είναι:

$$f(x) - f\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\eta\mu\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) - 3 - \sqrt{2}\eta\mu\left[2(x + \frac{\pi}{4}) - \frac{\pi}{4}\right] + 3 = \sqrt{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) - \eta\mu\left[2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\pi}{4}\right] = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) - \eta\mu\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu 2x\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4} - \sigma\upsilon\nu 2x\eta\mu\frac{\pi}{4} - \eta\mu 2x\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4} - \sigma\upsilon\nu 2x\eta\mu\frac{\pi}{4} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\sigma\upsilon\nu 2x = 1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 2x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 2x = \sigma\upsilon\nu\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 2x = \sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 2\kappa\pi + \dfrac{3\pi}{4} \\ 2x = 2\kappa\pi - \dfrac{3\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \kappa\pi + \dfrac{3\pi}{8} \\ x = \kappa\pi - \dfrac{3\pi}{8} \end{cases}, \kappa \in Z$$

Όμως:

Είναι: $x \in [0, \pi] \Leftrightarrow \leq \kappa\pi + \frac{3\pi}{8} \leq \pi \Leftrightarrow 0 \leq \kappa + \frac{3}{8} \leq 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{8} \leq \kappa \leq \frac{5}{8} \overset{\kappa \in Z}{\Leftrightarrow} \kappa = 0$$

άρα είναι $x = \frac{3\pi}{8}$

Είναι: $x \in [0, \pi] \Leftrightarrow \leq \kappa\pi - \frac{3\pi}{8} \leq \pi \Leftrightarrow 0 \leq \kappa - \frac{3}{8} \leq 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{8} \leq \kappa \leq \frac{11}{8} \overset{\kappa \in Z}{\Leftrightarrow} \kappa = 1 \text{ άρα είναι } x = \frac{5\pi}{8}$$

ΘΕΜΑ 4ο

Α. Πρόκειται για γεωμετρική πρόοδο με $\alpha_1 = 10$ και $\lambda = 3$. Ο πληθυσμός των βακτηριδίων, ύστερα από 6 ώρες δίνεται από τον έβδομο όρο της προόδου.
Άρα είναι $\alpha_7 = \alpha_1 \cdot \lambda^6 = 10 \cdot 3^6 = 7290$

Β.1. Στην περίπτωση αυτή έχουμε αριθμητική πρόοδο (β_ν) με $\beta_1 = 10 \cdot 3^6$ και $\omega = -3^3 \cdot 10$.
Το ζητούμενο πλήθος είναι:
$\beta_{21} = \beta_1 + 20\omega \Leftrightarrow \beta_{21} = 3^6 \cdot 10 - 3^3 \cdot 200 \Leftrightarrow \beta_{21} = 3^3 \cdot 10(3^3 - 20) \Leftrightarrow$
$\beta_{21} = 70 \cdot 3^3 = 1890$

Β.2. Έστω ότι όλα τα βακτηρίδια θα καταστραφούν μετά από ν ώρες. Τότε πρέπει να είναι:
$\beta_{\nu+1} = 0 \Leftrightarrow \beta_1 + \nu \cdot \omega = 0 \Leftrightarrow 3^3 \cdot 10 + \nu(-3^3 \cdot 10) = 0 \Leftrightarrow 3^6 \cdot 10 - 3^3 \cdot 10\nu = 0$

$$\Leftrightarrow \nu = \frac{3^6 \cdot 10}{3^3 \cdot 10} \Leftrightarrow \nu = 3^3 = 27 \text{ ώρες.}$$