ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΔΕΥΤΕΡΑ 27 ΜΑΪΟΥ 2013 - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σχολικό σελ. 335
Α2. Θεωρία σχολικό σελ. 246
Α3. Θεωρία σχολικό σελ. 222
Α4. **α)** $\rightarrow$ Λάθος
β) $\rightarrow$ Σωστό
γ) $\rightarrow$ Σωστό
δ) $\rightarrow$ Λάθος
ε) $\rightarrow$ Σωστό

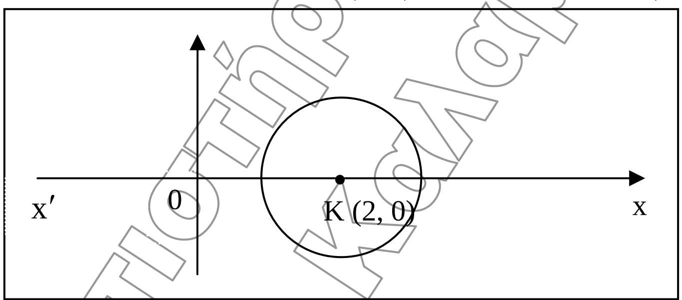
ΘΕΜΑ Β

Β1. $|z-2|(\bar{z}-2)+|z-2|=2$

$\Leftrightarrow |z-2|^2+|z-2|-2=0$

Θέτω $|z-2|=y\geq 0$ οπότε $y^2+y-2=0 \Leftrightarrow y=1$ ή $y=-2$ απορρίπτεται.

Άρα $|z-2|=1$ δηλαδή ο γ.τ. είναι κύκλος με $\kappa(2,0)$ και $\rho=1$ δηλαδή $(x-2)^2+y^2=1$



Β2. $w^2+\beta w+\gamma=0 \quad (1)$

Επειδή οι z_1, z_2 είναι ρίζες της τότε $z_1=\overline{z_2}$ οπότε αν $z_1=x_1+\psi_1 i$ (1)

$$\begin{matrix} z_1+z_2=-\beta \\ z_1\cdot z_2=\gamma \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1=-\beta \\ x_1^2+\psi_1^2=\gamma \quad (1) \end{cases}$$

Επίσης $|\mathrm{Im}(z_1)-\mathrm{Im}(z_2)|=2 \Leftrightarrow |2y_1|=2 \Leftrightarrow |y_1|=1 \quad (2)$

Οπότε από τον $C:(x_1-2)^2+y_1^2=1 \Leftrightarrow (x_1-2)^2+1=1 \Leftrightarrow x_1=2$

Άρα $z_1=2+i$ και $z_2=2-i$

Οπότε $-\beta=4 \Leftrightarrow \beta=-4$ και $\gamma=2^2+1^2=5$

Β3. $v^3=-\alpha_2 v^2-\alpha_1 v-\alpha_0$ οπότε

$|v|^3=\left|-\alpha_2 v^2-\alpha_1 v-\alpha_0\right| \le |\alpha_2||v|^2+|\alpha_1||v|+|\alpha_0|$

Άρα $|v|^3 \le |\alpha_2||v|^2+|\alpha_1||v|+|\alpha_0| \le 3|v|^2+3|v|+3 \Leftrightarrow$

$|v|^3 \le 3|v|^2+3|v|+3 \Leftrightarrow |v|^3 \le 3\left(|v|^2+|v|+1\right) \Leftrightarrow$

$|v|^3-1 \le 3\left(|v|^2+|v|+1\right)-1<3\left(|v|^2+|v|+1\right)$

$\left(|v|-1\right)\cdot\left(|v|^2+|v|+1\right)<3\left(|v|^2+|v|+1\right) \Leftrightarrow |v|-1<3 \Leftrightarrow |v|<4$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $\left(f(x)+x\right)\left(f(x)+x\right)'=x \Leftrightarrow \dfrac{\left(f(x)+x\right)^2}{2}=\dfrac{x^2}{2}+C$

Για $x=0: \dfrac{1}{2}=0+C \Leftrightarrow C=\dfrac{1}{2}$

Άρα $\dfrac{\left(f(x)+x\right)^2}{2}=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left(f(x)+x\right)^2=x^2+1$

Θεωρώ $h(x)=f(x)+x$ τότε $h^2(x)=x^2+1\neq 0$ οπότε $h(x)\neq 0$ και συνεχής άρα διατηρεί πρόσημο με $h(0)=f(0)=1>0$ οπότε $h^2(x)=x^2+1 \Leftrightarrow h(x)=\sqrt{x^2+1}$ άρα $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$

Γ2. $f\left(g(x)\right)=1 \Leftrightarrow f\left(g(x)\right)=f(0)$ (1)

Όμως $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+1}}2x-1=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}-1=\dfrac{x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$

Αν $x\ge 0 \Rightarrow x<\sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow x^2<x^2+1$ το οποίο ισχύει

Αν $x<0 \Rightarrow x<\sqrt{x^2+1}$ ισχύει

Άρα $f'(x)<0$ οπότε $f\downarrow \Rightarrow (1-1)$

(1) $f\left(g(x)\right)=f(0) \overset{f\,1-1}{\Leftrightarrow} g(x)=0$

$g(x)=x^3+\dfrac{3x^2}{2}-1 \Leftrightarrow g'(x)=3x^2+3x$

$g'(x)=0 \Leftrightarrow 3x(x+1)=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x=-1$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		↗		↘		↗	

$$g(-\infty,-1)\overset{g\uparrow}{\underset{g\sigma\upsilon\nu}{=}}\left(\lim_{x\to-\infty}g(x),\lim_{x\to-1^-}g(x)\right)=\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\quad \text{όπου}\quad \lim_{x\to-\infty}g(x)=\lim_{x\to-\infty}x^3=-\infty$$

$$g(-1)=-1+\frac{3}{2}-1=\frac{3}{2}-2=-\frac{1}{2}$$

$$g[-1,0]\overset{g\downarrow}{\underset{g\sigma\upsilon\nu}{=}}\left[g(0),g(-1)\right]=\left[-1,-\frac{1}{2}\right]\ \text{όπου}\ g(0)=-1$$

$$g(0,+\infty)\overset{g\uparrow}{\underset{g\sigma\upsilon\nu}{=}}\left(\lim_{x\to0^+}g(x),\lim_{x\to+\infty}g(x)\right)=(-1,+\infty)$$

Το $g(x)=0\notin g(-\infty,-1)$ άρα δεν έχει ρίζα στο $(-\infty,-1)$

Το $g(x)=0\notin g[-1,0]$ άρα δεν έχει ρίζα στο $[-1,0]$

Το $g(x)=0\in g(0,+\infty)$ άρα έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0,+\infty)$ και επειδή $g\uparrow$ θα είναι μοναδική.

Γ3. $h(x)=\int_{x-\frac{\pi}{4}}^{0}f(t)dt-f\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\varepsilon\varphi x\ ,\ x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$

Η h είναι συνεχής στο $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$

$$h\left(\frac{\pi}{4}\right)=-f(0)\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}=-1<0$$

$$h(0)=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}f(t)dt-f\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\varepsilon\varphi0=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}f(t)dt>0$$

Για $-\frac{\pi}{4}<x<0\overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow}f(0)<f(x)\Leftrightarrow f(x)>1>0\Rightarrow\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}f(t)dt>0$

Άρα από Θ.Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον

$$x_0\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right):h(x_0)=0\Leftrightarrow\int_{x_0-\frac{\pi}{4}}^{0}f(t)dt=f\left(x_0-\frac{\pi}{4}\right)\varepsilon\varphi x_0$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $\lim_{h\to0}\frac{f(1+5h)-f(1-h)}{n}=0\Leftrightarrow\lim_{h\to0}\left[\frac{f(1+5h)-f(1)}{n}+\frac{f(1)-f(1-h)}{n}\right]=0\quad(1)$

Το $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+5h)-f(1)}{n}\underset{h=\frac{x-1}{5}}{\overset{1+5h=x}{=}}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{\frac{x-1}{5}}=5\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=5\cdot f'(1)$

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-h)}{n}\underset{h=1-x}{\overset{1-h=x}{=}}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(1)-f(x)}{1-x}=f'(1)$

Άρα $(1)\Rightarrow 5f'(1)+f'(1)=0\Rightarrow 6f'(1)=0\Rightarrow f'(1)=0$

Επειδή $f'(1)=0$ και η $f'\uparrow$ το 1 είναι μοναδική ρίζα

Για $x>1\overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow}f'(x)>f'(1)=0$

Για $0<x<1\overset{f'\uparrow}{\Rightarrow}f'(x)<f'(1)=0$

x	0	1	$+\infty$
f′(x)	-	0	+
f(x)	↘		↗

Άρα η f παρουσιάζει ελάχιστο στο 1 το $f(1)=1$.

Δ2. α) α΄τρόπος: f συνεχής συνεπάγεται $\dfrac{f(t)-1}{t-1}$ συνεχής ως αποτέλεσμα συνεχής $\Rightarrow$ $\displaystyle\int_{\alpha}^{x}\frac{f(t)-1}{t-1}dt$ παραγωγίσιμη $g'(x)=\dfrac{f(x)-1}{x-1}>0$ αφού η f παρουσιάζει ελάχιστο στο 1 ίσο με 1 οπότε $f(x)\geq f(1)=1>0$ για x>1.

β΄ τρόπος:f συνεχής συνεπάγεται $\dfrac{f(t)-1}{t-1}$ συνεχής ως αποτέλεσμα συνεχής $\Rightarrow$ $\displaystyle\int_{\alpha}^{x}\frac{f(t)-1}{t-1}dt$

οπότε παραγωγίσιμη με $g'(x)=\dfrac{f(x)-1}{x-1}=\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$

Από Θ.Μ.Τ. για τη f στο $[1,x]$ με $x>1$ έχουμε $\xi\in(1,x):f'(\xi)=\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$1<\xi<x\overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow}f'(1)<f'(\xi)<f'(x)\quad\Leftrightarrow f'(\xi)>0\Leftrightarrow\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}>0$.

Άρα για $x>1$ είναι $g'(x)>0\Leftrightarrow g\uparrow$ στο $(1,+\infty)$

β) Θεωρώ $h(x)=\displaystyle\int_{x}^{x+1}g(u)du,\ x>1$ οπότε $h'(x)=g(x+1)-g(x)$

αλλά $1<x<x+1\overset{g\uparrow}{\Leftrightarrow}g(x)<g(x+1)$
άρα $h'(x)>0$ οπότε $h\uparrow$

Η ανίσωση είναι ισοδύναμη με την $h(8x^2+5)>h(2x^4+5)\overset{h\uparrow}{\Leftrightarrow}$, $x\in R$ (αφού $8x^2+5, 2x^4+5>1$ $\forall x\in R$)

$$8x^2+5>2x^4+5\Leftrightarrow 8x^2>2x^4\Leftrightarrow 4x^2>x^4\Leftrightarrow x^4-4x^2<0\Leftrightarrow x^2\left(x^2-4\right)<0$$

$$\left.\begin{array}{r}-2<x<2\\ x\neq 0\end{array}\right\}\Rightarrow x\in(-2,0)\cup(0,2)$$

Δ3. $g''(x)=\dfrac{f'(x)(x-1)-\left(f(x)-f(1)\right)}{(x-1)^2}$

Το πρόσημο της g'' εξαρτάται μόνο από τον αριθμητή

Από Θ.Μ.Τ. στο f $[1,x]$, $x>1$ $\quad 1<\xi<x+1\overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow}\ f'(1)<f'(\xi)<f'(x)$

$\Leftrightarrow \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}<f'(x)$ με $x>1\Leftrightarrow x-1>0$

Άρα $f(x)-f(1)<(x-1)f'(x)$

$\Leftrightarrow (x-1)f'(x)-\left(f(x)-f(1)\right)>0$

Άρα $g''(x)>0$ συνεπάγεται g κυρτή.

β) Η εξίσωση $(\alpha-1)\,g(x)=\left(f(\alpha)-1\right)(x-\alpha)$, $x>1$ προφανή ρίζα $x=\alpha$

έστω ότι υπάρχει x με $x\neq\alpha$

$(\alpha-1)g(x)=\left(f(\alpha)-1\right)(x-\alpha)$, $x>1$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{g(x)}{x-\alpha}=\dfrac{f(\alpha)-1}{\alpha-1}\\ g'(\alpha)=\dfrac{f(\alpha)-1}{\alpha-1}\end{array}\right\}\dfrac{g(x)}{x-\alpha}=g'(\alpha)$$

Από Θ.Μ.Τ. στο $[\alpha,x]$ με $x>\alpha$ ή $[x,\alpha]$ με $1<x<\alpha$

$\xi\in(\alpha,x)$ ή $(x,\alpha): g'(\xi)=\dfrac{g(x)}{x-\alpha}$

Οπότε $g'(\xi)=g'(\alpha)$ Άτοπο αφού $g'\uparrow$ άρα το α μοναδική ρίζα.

Επιμέλεια απαντήσεων:
Δραγώνας Μπάμπης
Γκιούλος Θεόδωρος
Διονυσοπούλου Σοφία
Μαθηματικοί
Φροντιστήριο Μ.Ε «ΕΠΙΛΟΓΗ» - Καλαμάτα
http://www.epil.gr