ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΔΕΥΤΕΡΑ 27 ΜΑΪΟΥ 2013 - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 194

Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 246

Α3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 222

Α4. **α.** Λάθος, **β.** Σωστό, **γ.** Σωστό, **δ.** Λάθος, **ε.** Σωστό.

ΘΕΜΑ Β

Β1. $(z-2)(\bar{z}-2) + |z-2| = 2 \Leftrightarrow$

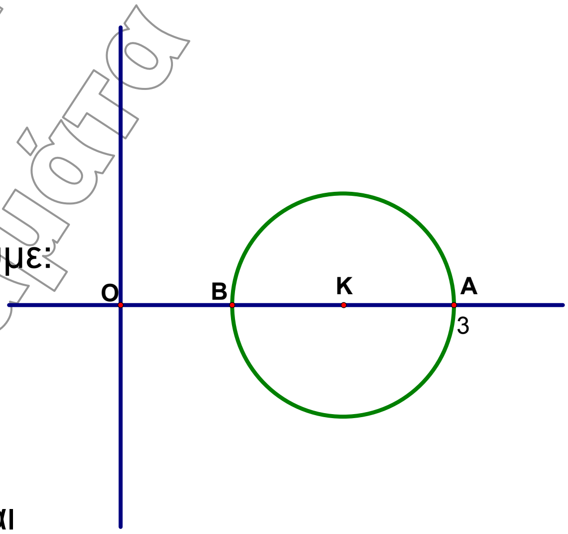
$|z-2|^2 + |z-2| - 2 = 0$

Θέτουμε $|z-2| = \omega \geq 0$ και έχουμε:

$\omega^2 + \omega - 2 = 0 \Leftrightarrow$

$\omega = 1$ ή $\cancel{\omega = -2}$ (απορρίπτεται)

άρα $|z-2| = 1$



Επομένως ο ζητούμενος γ.τ. είναι

ο κύκλος C με κέντρο $K(2,0)$ και ακτίνα $\rho = 1$

Από το σχήμα βλέπουμε ότι

$|z|_{max} = (OA) = 3$, άρα $|z| \leq 3$

Β2.

- z_1, z_2 είναι συζυγείς μιγαδικοί, άρα $\mathrm{Im}(z_1) = -\mathrm{Im}(z_2)$

  $|\mathrm{Im}(z_1) - \mathrm{Im}(z_2)| = 2 \Leftrightarrow |2\mathrm{Im}(z_1)| = 2 \Leftrightarrow$

  $|\mathrm{Im}(z_1)| = 1 \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z_1) = \pm 1$

  Άρα $z_{1,2} = \kappa \pm i,\ \kappa \in \mathbb{R}$

- $|z_1 - 2| = 1 \Leftrightarrow |\kappa \pm i - 2| = 1 \Leftrightarrow$

  $\sqrt{(\kappa - 2)^2 + 1^2} = 1 \Leftrightarrow (\kappa - 2)^2 + 1 = 1 \Leftrightarrow$

  $(\kappa - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow \kappa = 2$, άρα $z_{1,2} = 2 \pm i$

- Τύποι Vieta

  $S = -\beta = z_1 + z_2 = 4$, άρα $\boldsymbol{\beta = -4}$

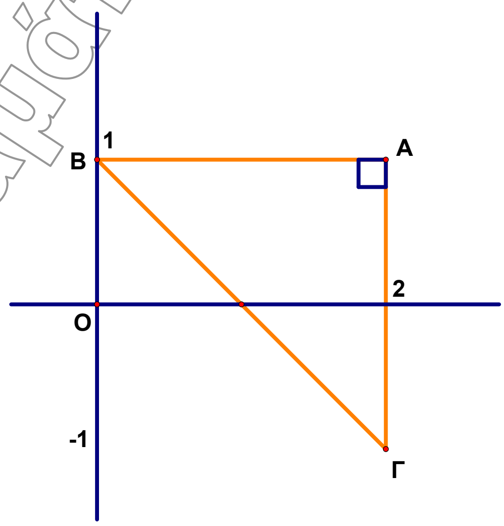
  $P = \gamma = z_1 \cdot z_2 = 5$, άρα $\boldsymbol{\gamma = 5}$

Β3. $u = \left(\dfrac{z_1 + i}{z_2 - i}\right)^{2013} \underset{z_2 = 2 - i}{\overset{z_1 = 2 + i}{=}} \left(\dfrac{2 + 2i}{2 - 2i}\right)^{2013}$

$= \left(\dfrac{1 + i}{1 - i}\right)^{2013} = \left(\dfrac{(1 + i)^2}{(1 - i)(1 + i)}\right)^{2013}$

$= \left(\dfrac{\cancel{1} + 2i + \cancel{i^2}}{1 - i^2}\right)^{2013} = \left(\dfrac{2i}{2}\right)^{2013}$

$= i^{2013} = \left(i^4\right)^{503} \cdot i = 1^{503} \cdot i = i$



$A(z_1) \rightarrow A(2, 1)$

$\Gamma(z_2) \rightarrow \Gamma(2, -1)$

$B(u) \rightarrow B(0, 1)$

$(AB\Gamma) = \dfrac{1}{2} \cdot (AB) \cdot (A\Gamma) = \dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 =$ **2 τ.μ.**

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας (ε) είναι $\frac{1}{3}$, άρα η εφαπτομένη της C_f στο σημείο Α (2 , f (2)) που είναι κάθετη στην (ε) θα έχει συντελεστή διεύθυνσης $f'(2) = -3$.

$$f'(x) = \left(\frac{4}{x-1} + αx\right)' = α - \frac{4}{(x-1)^2}$$

$$f'(2) = -3 \Leftrightarrow α - \frac{4}{(2-1)^2} = -3 \Leftrightarrow α - 4 = -3 \Leftrightarrow \mathbf{α = 1}$$

Γ2. Για α = 1 είναι :

$$f(x) = \frac{4}{x-1} + x,\ x \neq 1$$

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2 - 4}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ή } x = 3$$

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	‖	−	0	+	
$f(x)$		↗		↘	‖	↘		↗	

Η f είναι γνησίως αύξουσα στα $(-\infty, -1]$ και $[3 , +\infty)$, ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στα $[-1 , 1)$ και $(1 , 3]$.
Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το $f(-1) = -3$, ενώ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το $f(3) = 5$.

Γ3. • $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}\left(\frac{4}{x-1}+x\right) = +\infty$, διότι $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{4}{x-1} = +\infty, \lim\limits_{x\to 1^+} x = 1$

άρα **η C_f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την $x=1$**

1^{ος} τρόπος

• $\lim\limits_{x\to -\infty}[f(x)-x] = \lim\limits_{x\to -\infty}\frac{4}{x-1} = \lim\limits_{x\to -\infty}\frac{4}{x} = 0$

2^{ος} τρόπος

• $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to -\infty}\frac{\frac{4}{x-1}+x}{x} = \lim\limits_{x\to -\infty}\left(\frac{4}{x^2-x}+1\right) = 1 = \lambda$

$\lim\limits_{x\to -\infty}[f(x)-\lambda x] = \lim\limits_{x\to -\infty}\left(\frac{4}{x-1}+x-x\right) = \lim\limits_{x\to -\infty}\frac{4}{x} = 0 = \beta$

άρα **η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$ την $y=x$**

1^{ος} τρόπος

• $\lim\limits_{x\to +\infty}[f(x)-x] = \lim\limits_{x\to +\infty}\frac{4}{x-1} = \lim\limits_{x\to +\infty}\frac{4}{x} = 0$

2^{ος} τρόπος

• $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\frac{4}{x-1}+x}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{4}{x^2-x}+1\right) = 1 = \lambda$

$\lim\limits_{x\to +\infty}[f(x)-\lambda x] = \lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{4}{x-1}+x-x\right) = \lim\limits_{x\to +\infty}\frac{4}{x} = 0 = \beta$

άρα **η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την $y=x$**

Γ4. • $\lim\limits_{x\to -1}\frac{(x-1)\cdot f(x)-6}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to -1}\frac{(x-1)\cdot\left(\frac{4}{x-1}+x\right)-6}{x^2-1}$

$= \lim\limits_{x\to -1}\frac{4+x\cdot(x-1)-6}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-x-2}{x^2-1}$

$= \lim\limits_{x\to -1}\frac{\cancel{(x+1)}(x-2)}{\cancel{(x+1)}(x-1)} = \lim\limits_{x\to -1}\frac{x-2}{x-1} = \frac{-3}{-2} = \mathbf{\frac{3}{2}}$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f'(x) = \left(x^2 + x\sqrt{x^2+1}\right)' = 2x + \sqrt{x^2+1} + \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}$

$$= \frac{2x\sqrt{x^2+1} + x^2 + 1 + x^2}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)^2}{\sqrt{x^2+1}} > 0$$

άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο IR.

Δ2. $f(x^3 - x + 1) = f(2) \overset{f\ \text{"1 - 1"}}{\Leftrightarrow} x^3 - x + 1 = 2 \Leftrightarrow x^3 - x - 1 = 0$

Θεωρούμε $Q(x) = x^3 - x - 1$

- η Q είναι συνεχής στο $[1, 3]$ ως πολυωνυμική
- $Q(1) = 1^3 - 1 - 1 = -1 < 0$
  $Q(3) = 3^3 - 3 - 1 = 23 > 0$

από Θ. Bolzano η Q έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(1, 3)$

Δ3. Η f είναι παραγωγίμη στα $[1, 2]$, $[2, 3]$ και $[1, 3]$
άρα ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ.
σε καθένα από τα παραπάνω διαστήματα
Από Θ.Μ.Τ. με την f στα $[1, 2]$, $[2, 3]$ και $[1, 3]$
έχουμε ότι υπάρχουν :

- $\xi_1 \in (1, 2)$ με $f'(\xi_1) = \dfrac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = f(2) - f(1)$
- $\xi_2 \in (2, 3)$ με $f'(\xi_2) = \dfrac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = f(3) - f(2)$
- $\xi \in (1, 3)$ με $f'(\xi) = \dfrac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \dfrac{f(3) - f(1)}{2}$

Είναι $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = f(3) - f(2) + f(2) - f(1)$

$$= f(3) - f(1) = 2f'(\xi)$$