ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄) ΔΕΥΤΕΡΑ 20 ΜΑΪΟΥ 2013 - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σχολικό σελ. 28
Α2. Θεωρία σχολικό σελ. 14
Α3. Θεωρία σχολικό σελ. 87
Α4. α) → Λάθος
β) → Σωστό
γ) → Λάθος
δ) → Λάθος
ε) → Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1

$$\gamma = \lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{\sqrt{x+6}-3} = \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)\cdot(x+3)(\sqrt{x+6}-3)}{(\sqrt{x+6}-3)\cdot(\sqrt{x+6}-3)} = \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)\cdot(x+3)\cdot(\sqrt{x+6}-3)}{x-3} = 6\cdot 6 = 36$$

Β2. $f'(x) = 3x^2 - 2\alpha x + \beta$

Για να είναι οι εφαπτόμενες της Cf στα σημεία με τετμημένες 1 και $\frac{1}{3}$ παράλληλες με τον άξονα x΄x, πρέπει $f'(1) = f'(\frac{1}{3}) = 0$

Είναι: $f'(1) = 0 \Leftrightarrow 3 - 2\alpha + \beta = 0 \Leftrightarrow 2\alpha - \beta = 3$ (1)

Και: $f'(\frac{1}{3}) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3} - \frac{2\alpha}{3} + \beta = 0 \Leftrightarrow -2\alpha + 3\beta = -1$ (2)

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) παίρνουμε: $2\alpha - \beta - 2\alpha + 3\beta = 2 \Leftrightarrow 2\beta = 2 \Leftrightarrow \beta = 1$
Και από τη (2) έχουμε: $-2\alpha + 3\cdot 1 = -1 \Leftrightarrow -2\alpha = -4 \Leftrightarrow \alpha = 2$

Β3. Για $\alpha = 2$, $\beta = 1$, $\gamma = 36$ είναι:
$f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 36$
$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$		+	0	-	0	+	
f (x)		↗		↘		↗	

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right]$, [1, +∞), ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$

Τοπικό μέγιστο: $f\left(\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^3-2\left(\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}+36=\frac{976}{27}$

Τοπικό ελάχιστο: $f(1) = 1^3 - 2\cdot 1^2 + 1 + 36 = 36$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $3c+\frac{c}{2}=85-50 \Leftrightarrow 3c+\frac{c}{2}=35 \Leftrightarrow \frac{7c}{2}=35 \Leftrightarrow c=10$

Γ2.

Έχουμε, δ = 75 μέσω της $3^{ης}$ κλάσης.

άρα έχουμε $f_1+f_2+\frac{f_3}{2}=0,5$ και

$\frac{f_3}{2}+f_4=0,5 \overset{f_4=2f_3}{\Leftrightarrow} \frac{f_3}{2}+2f_3=0,5 \Leftrightarrow \frac{5f_3}{2}=0,5 \Rightarrow f_3=0,2$

Άρα $f_3=0,2$ και $f_4=0,4$

$f_1+f_2+\frac{f_3}{2}=0,5 \Rightarrow f_1+f_2+0,1=0,5 \Rightarrow f_1+f_2=0,4 (2)$

$\bar{x}=\sum_{i=1}^{4} x_i f_i = 55f_1+65f_2+75\cdot 0,2+85\cdot 0,4=74$

$\Leftrightarrow 55f_1+65(0,4-f_1)+75\cdot 0,2+85\cdot 0,4=74$

$\Leftrightarrow 55f_1+26-65f_1+15+34=74$

$\Leftrightarrow -10f_1=74-26-15-34$

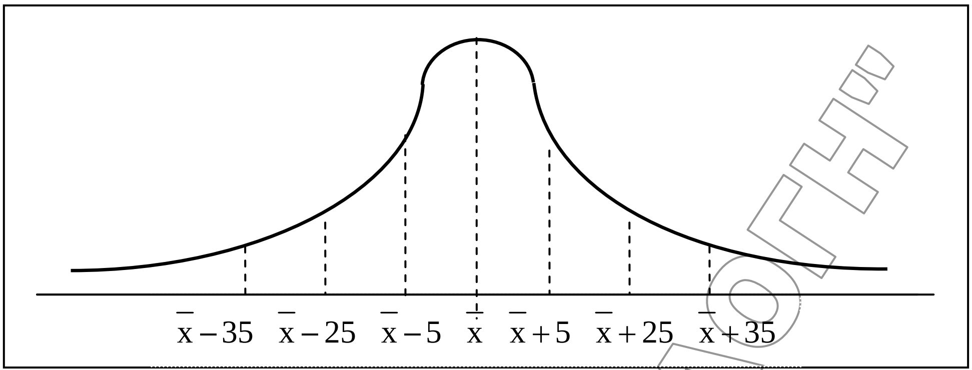
$\Leftrightarrow f_1=\frac{1}{10}=0,1$ οπότε $f_2=0,3$

Κλάσεις	x_i	f_i
$[50-60)$	$x_1=55$	0,1
$[60-70)$	$x_2=65$	0,3
$[70-80)$	$x_3=75$	0,2
$[80-90)$	$x_4=85$	0,4
ΣΥΝΟΛΟ	-	1

Γ3. $\bar{x}=\frac{55\cdot f_1+65\cdot f_2+75f_3}{f_1+f_2+f_3}=\frac{55\cdot 0,1+65\cdot 0,3+75\cdot 0,2}{0,1+0,3+0,2}=\frac{5,5+19,5+15}{0,6}=\frac{40}{0,6}=$

$=\frac{400}{6}=\frac{200}{3}$

Γ4.



$$\left.\begin{array}{l} 2,5\% \text{ τουλάχιστον } \bar{x}-2S. \text{ Άρα } \bar{x}-2S=74 \\ 16\% \text{ τουλάχιστον } \bar{x}-S. \text{ Άρα } \bar{x}-S=68 \end{array}\right\} \begin{array}{l} S=2 \\ \bar{x}=70 \end{array}$$

$CV=\dfrac{S}{|\bar{x}|}=\dfrac{2}{70}<10\%$. Άρα είναι ομοιογενές.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f(x)=x^2+k+1$ και $f(1)=k+2$

$f'(x)=(x^2+k+1)'=2x$ και $f'(1)=2$

Εξίσωση εφαπτομένης

(ε): $y-f(1)=f'(1)\cdot(x-1) \Leftrightarrow$ (ε): $y=2x+k$

Σημεία τομής με τους άξονες

x΄x: θέτω $y=0$, οπότε $y=k$, άρα $B(0,k)$

y΄y: θέτω $x=0$, οπότε $x=-\dfrac{k}{2}$, άρα $A(-\dfrac{k}{2},0)$

Εμβαδόν

$$E=\frac{1}{2}(OA)\cdot(OB)=\frac{1}{2}\cdot\left|-\frac{k}{2}\right|\cdot|k|\overset{k>2}{=}\frac{1}{2}\cdot\frac{k}{2}\cdot k=\frac{k^2}{4}$$

$E<4\Leftrightarrow\dfrac{k^2}{4}<4\Leftrightarrow k^2<16\Leftrightarrow |k|<4$

Αλλά $k>2$, $k<4$ και $k\in Z$ Οπότε $2<k<4 \Leftrightarrow k=3$

Δ2.α. Τα (x_1, y_1), (x_2, y_2), …, (x_{50}, y_{50}) αφού είναι τα 50 σημεία της (ε), θα επαληθεύουν την εξίσωση $y=2x+3$

Επομένως $y_i=2x_i+3 \Leftrightarrow x_i=\dfrac{1}{2}y_i-\dfrac{3}{2}$, $i=1,\dots,50$

Από εφαρμογή του σχολικού είναι $\bar{x}=\dfrac{1}{2}\bar{y}-\dfrac{3}{2}\overset{\bar{y}=63}{=}30$

β. $$\bar{x}'=\frac{(x_1+3)+\dots+(x_{20}+3)+x_{21}+\dots+x_{35}+(x_{36}-\lambda)+\dots+(x_{50}-\lambda)}{50}\Leftrightarrow$$

$$31=\frac{(x_1+\ldots+x_{20}+x_{21}+\ldots+x_{35}+x_{36}+\ldots+x_{50})+60-15\lambda}{50}\Leftrightarrow$$

$$31=\frac{\Sigma x_i+60-15\lambda}{50}\Leftrightarrow 31=\frac{\Sigma x_i}{50}+\frac{60-15\lambda}{50}\Leftrightarrow 31=\bar{x}+\frac{60-15\lambda}{50}\Leftrightarrow$$

$$31=30+\frac{60-15\lambda}{50}\Leftrightarrow 1=\frac{60-15\lambda}{50}\Leftrightarrow 60-15\lambda=50\Leftrightarrow \lambda=\frac{2}{3}$$

Δ3. Για το f(1): $f(x) = x^2 + 4 \Leftrightarrow f(1) = 1^2 + 4 \Leftrightarrow f(1) = 5$

Για το f΄(1): $f'(x) = 2x \Leftrightarrow f'(0) = 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↗

$$0<\alpha<\beta<\gamma<1 \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} 0<4=f(0)<f(\alpha)<f(\beta)<f(\gamma)<f(1)=5$$

Τελική διάταξη: $f'(0) < f(\alpha) < f(\beta) < f(\gamma) < f(1)$

$R = f(1) - f'(0) = 5 - 0 = 5$

$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{5}t_i}{5}=\frac{f'(0)+f(\alpha)+f(\beta)+f(\gamma)+f(1)}{50}=\frac{0+\alpha^2+4+\beta^2+4+\gamma^2+4+5}{5}$$

$$=\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+17}{5}=\frac{6+17}{5}=\frac{23}{5}$$

Το δεδομένο $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 6$ είναι λάθος

Αν $0 < \alpha < \beta < \gamma < 1$, τότε $0 < \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 < 3$

Οπότε $\frac{17}{5}<\bar{x}<4<\frac{23}{5}$

Επιμέλεια απαντήσεων:
Δραγώνας Μπάμπης
Γκιούλος Θεόδωρος
Διονυσοπούλου Σοφία
Μαθηματικοί
Φροντιστήριο Μ.Ε «ΕΠΙΛΟΓΗ» - Καλαμάτα
http://www.epil.gr