ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 13 ΙΟΥΝΙΟΥ 2013
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 217
Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 260
Α3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 261
Α4. **α.** Σωστό, **β.** Λάθος, **γ.** Σωστό, **δ.** Σωστό, **ε.** Λάθος.

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η εξίσωση γίνεται : $2x^2 - |w-4-3i|\cdot x + 2|z| = 0$

- Πρέπει $\Delta = 0 \Leftrightarrow \left(-|w-4-3i|\right)^2 - 4\cdot 2\cdot 2|z| = 0 \Leftrightarrow$

  $|w-4-3i|^2 = 16|z| \Leftrightarrow |z| = \dfrac{|w-4-3i|^2}{16}$ **(1)**

- **1ος τρόπος** Το 1 είναι διπλή ρίζα άρα $\dfrac{-\beta}{2\alpha} = \dfrac{|w-4-3i|}{4} = 1$

  $\Leftrightarrow |w-4-3i| = 4$ **(2)**

- **2ος τρόπος** Το 1 είναι ρίζα της εξίσωσης άρα

  $2 - |w-4-3i| + 2|z| = 0 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} 2 - |w-4-3i| + 2\dfrac{|w-4-3i|^2}{16} = 0$

  $\overset{\cdot 8}{\Leftrightarrow} 16 - 8|w-4-3i| + |w-4-3i|^2 = 0 \Leftrightarrow$

  $\left(|w-4-3i| - 4\right)^2 = 0 \Leftrightarrow |w-4-3i| - 4 = 0 \Leftrightarrow |w-4-3i| = 4$ **(2)**

  Επομένως ο γ.τ. των εικόνων του w είναι

  ο κύκλος C_2 με κέντρο $K(4,3)$ και ακτίνα $\rho_2 = 4$

- **(1)** $\overset{(2)}{\Rightarrow} |z| = \dfrac{4^2}{16} \Leftrightarrow |z| = 1$

  Επομένως ο γ.τ. των εικόνων του z είναι

  ο κύκλος C_1 με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho_1 = 1$

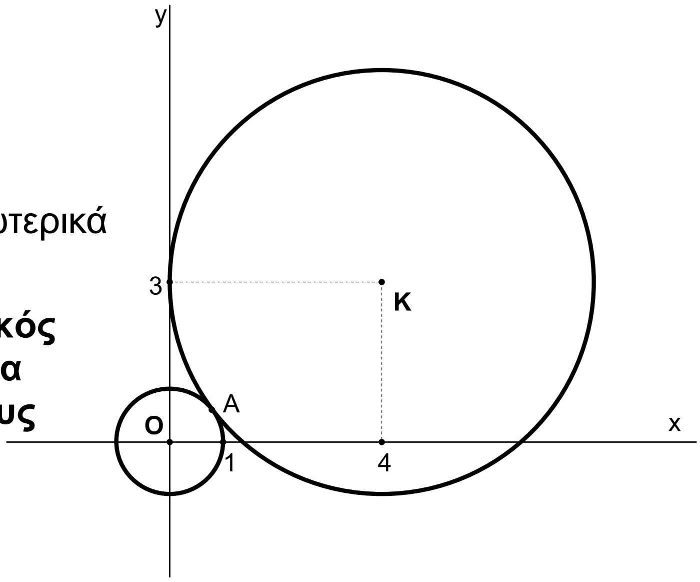
Β2. $(OK) = \sqrt{(4-0)^2 + (3-0)^2}$

$= \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$

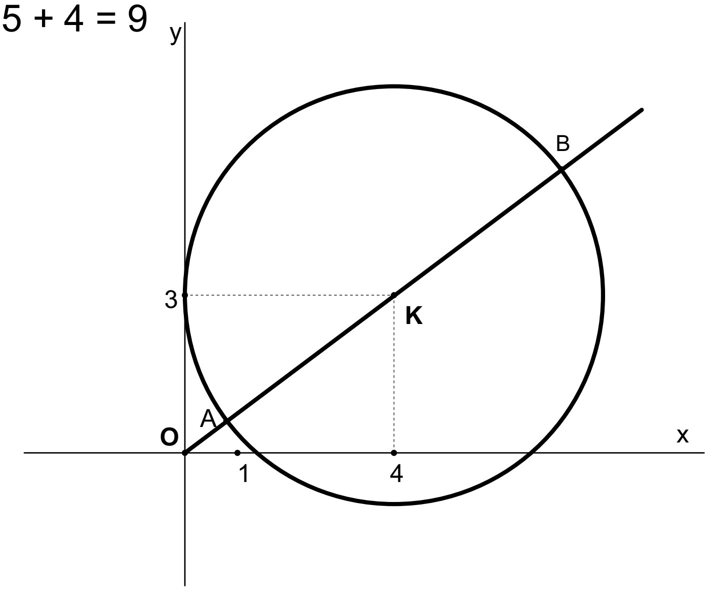
Είναι $(OK) = \rho_1 + \rho_2$,

άρα οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά σε ένα σημείο Α (σχήμα)

Επομένως **υπάρχει μοναδικός μιγαδικός αριθμός, η εικόνα του οποίου ανήκει και στους δύο παραπάνω γεωμετρικούς τόπους.**



Β3. $|w|_{max} = (OB) = (OK) + \rho_2 = 5 + 4 = 9$



$|z - w| \leq |z| + |-w| \Leftrightarrow$

$|z - w| \leq 1 + |w| \Leftrightarrow$

$|z - w| \leq 1 + |w|_{max} \Leftrightarrow$

$|z - w| \leq 1 + 9 \Leftrightarrow$

$\mathbf{|z - w| \leq 10}$

$|z + w| \leq |z| + |w| \Leftrightarrow$

$|z + w| \leq 1 + |w| \Leftrightarrow$

$|z + w| \leq 1 + |w|_{max} \Leftrightarrow$

$|z + w| \leq 1 + 9 \Leftrightarrow$

$\mathbf{|z + w| \leq 10}$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για κάθε $x \in IR$ είναι : $2xf(x) + x^2[f'(x) - 3] = -f'(x) \Leftrightarrow$

$$(x^2)' f(x) + x^2 f'(x) - 3x^2 + f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[x^2 f(x) - x^3 + f(x)\right]' = 0$$

από συνέπειες Θ.Μ.Τ. είναι $x^2 f(x) - x^3 + f(x) = c$

Για $x = 1$ έχω : $f(1) - 1 + f(1) = c \Leftrightarrow c = 0$

Επομένως για κάθε $x \in IR$ είναι :

$$x^2 f(x) - x^3 + f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 f(x) + f(x) = x^3 \Leftrightarrow$$

$$(x^2 + 1)f(x) = x^3 \Leftrightarrow \mathbf{f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}}$$

$$f'(x) = \left(\frac{x^3}{x^2+1}\right)' = \frac{3x^2 \cdot (x^2+1) - (x^3) \cdot 2x}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{3x^4 + 3x^2 - 2x^4}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4 + 3x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2 \cdot (x^2+3)}{(x^2+1)^2} \geq 0$$

και το "=" ισχύει μόνο για $x = 0$

άρα **η f είναι γνησίως αύξουσα στο IR**

Γ2. Η f είναι συνεχής στο IR, άρα δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{x^3}{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{x^3+x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{x^3} = 1 = \lambda$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x) - \lambda x\right] = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+1} - x\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x}{x^2+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}} = 0 = \beta$$

άρα **η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$ την $y = x$**

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^3}{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^3+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^3} = 1 = \lambda$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x) - \lambda x\right] = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+1} - x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}} = 0 = \beta$$

άρα **η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την $y = x$**

Γ3. $f\left(5(x^2+1)^3-8\right) \le f\left(8(x^2+1)^2\right) \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow}$

$5(x^2+1)^3 - 8 \le 8(x^2+1)^2 \Leftrightarrow$

$5(x^2+1)^3 \le 8(x^2+1)^2 + 8 \Leftrightarrow$

$5(x^2+1)^3 \le 8\left[(x^2+1)^2+1\right] \Leftrightarrow$

$\dfrac{(x^2+1)^3}{(x^2+1)^2+1} \le \dfrac{8}{5} \Leftrightarrow$

$f\left(x^2+1\right) \le f\left(2\right) \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow}$

$x^2+1 \le 2 \Leftrightarrow x^2 \le 1 \Leftrightarrow$

$|x| \le 1 \Leftrightarrow \mathbf{-1 \le x \le 1}$

Γ4. $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{f'(x)} = \lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{\dfrac{x^4+3x^2}{\left(x^2+1\right)^2}} = \lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{\dfrac{x^4+3x^2}{x^4+2x^2+1}}$

$$= \lim_{x\to-\infty}\sqrt{\dfrac{\dfrac{x^4}{x^4}+\dfrac{3x^2}{x^4}}{\dfrac{x^4}{x^4}+\dfrac{2x^2}{x^4}+\dfrac{1}{x^4}}} = \lim_{x\to-\infty}\sqrt{\dfrac{1+\dfrac{3}{x^2}}{1+\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}}}$$

$$= \sqrt{\dfrac{1+\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3}{x^2}}{1+\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{x^2}+\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^4}}} = \sqrt{\dfrac{1+0}{1+0+0}} = 1$$

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{f'(x)} - \kappa\right) = 5 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{f'(x)} - \kappa = 5 \Leftrightarrow$

$1 - \kappa = 5 \Leftrightarrow \mathbf{\kappa = -4}$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $\sqrt{x^2+1}\cdot f'(x) + \dfrac{x\cdot f(x)}{\sqrt{x^2+1}} - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$$\sqrt{x^2+1}\cdot f'(x) + \left(\sqrt{x^2+1}\right)'\cdot f(x) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\left(f(x)\cdot\sqrt{x^2+1}\right)' = (x)' \overset{\text{συνέπειες ΘΜΤ}}{\Rightarrow}$$

$$f(x)\cdot\sqrt{x^2+1} = x + c$$

Για $x = 0$ είναι $f(0) = c = 0$

Άρα $f(x)\cdot\sqrt{x^2+1} = x \Leftrightarrow$ $\mathbf{f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}, x \in IR}$

Δ2. $f'(x) = \dfrac{1\cdot\sqrt{x^2+1} - x\cdot\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}$

$$= \frac{\sqrt{x^2+1} - \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}$$

$$= \frac{\dfrac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3} > 0$$

άρα **η f είναι γνησίως αύξουσα στο IR**.

Δ3. $f(x^4+1) = f(3x^3+2x^2+3x) \underset{f\ \text{"1-1"}}{\overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow}}$

$x^4+1 = 3x^3+2x^2+3x \quad \Leftrightarrow$

$x^4-3x^3-2x^2-3x+1=0$

Θεωρούμε συνάρτηση φ, με $\varphi(x) = x^4-3x^3-2x^2-3x+1$

- η φ είναι συνεχής στα $[0\ ,\ 1]$ και $[1\ ,\ 4]$ ως πολυωνυμική
- $\varphi(0) = 1 > 0$, $\varphi(1) = -6 < 0$ και $\varphi(4) = 21 > 0$

Από Θ. Bolzano υπάρχουν :

ένα τουλάχιστον $x_1 \in (0\ ,1)$, τέτοιο ώστε $\varphi(x_1) = 0$

ένα τουλάχιστον $x_2 \in (1\ ,4)$, τέτοιο ώστε $\varphi(x_2) = 0$

Δ4. $\varphi'(x) = \left(x^4-3x^3-2x^2-3x+1\right)' = 4x^3-9x^2-4x-3$

- η φ είναι παραγωγίσιμη στο $[x_1\ ,\ x_2]$
- $\varphi(x_1) = \varphi(x_2) = 0$ από Δ3

από Θ. Rolle υπάρχει $\xi \in (x_1\ ,\ x_2) \subseteq (0\ ,\ 4)$,

τέτοιο ώστε $\varphi'(\xi) = 0$,

άρα $4\xi^3-9\xi^2-4\xi-3=0 \quad \Leftrightarrow$

$4\xi^3-9\xi^2 = 4\xi+3$

Επομένως **η εξίσωση $4x^3-9x^2 = 4x+3$**

έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0\ ,4)$.

Επιμέλεια απαντήσεων: Φροντιστήρια ΄΄Κελάφας΄΄