ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 10 ΙΟΥΝΙΟΥ 2013 - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 31

Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 92

Α3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 22

Α4. **α.** Σωστό, **β.** Σωστό, **γ.** Σωστό*, **δ.** Λάθος, **ε.** Σωστό.

***έπρεπε να δίνεται ότι η μεταβλητή είναι ποσοτική διακριτή**

ΘΕΜΑ Β

Β1. $$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+7}-3}{x^2-4}=\frac{1}{12\alpha} \Leftrightarrow \lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{x+7}-3\right)\left(\sqrt{x+7}-3\right)}{(x-2)(x+2)\left(\sqrt{x+7}-3\right)}=\frac{1}{12\alpha} \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{x-2}}{\cancel{(x-2)}(x+2)\left(\sqrt{x+7}-3\right)}=\frac{1}{12\alpha} \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{(x+2)\left(\sqrt{x+7}-3\right)}=\frac{1}{12\alpha} \Leftrightarrow \frac{1}{12\alpha}=\frac{1}{24} \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha=2}$$

$$A(-1\,,\,9)\in C_f \Leftrightarrow f(-1)=9 \Leftrightarrow -\alpha+\beta+5=9 \overset{\alpha=2}{\Leftrightarrow} \boldsymbol{\beta=6}$$

Β2. Για $\alpha=2$ και $\beta=6$ είναι :

$f(x)=2x^3-6x+5$ και $f'(x)=6x^2-6$

Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(x_0\,,\,f(x_0))$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ σημαίνει ότι :

$f'(x_0)=0 \Leftrightarrow 6x_0^2-6=0 \Leftrightarrow 6x_0^2=6 \Leftrightarrow x_0^2=1 \Leftrightarrow x_0=\pm 1$

- Για $x_0=-1$: $f(-1)=9 \rightarrow$ **Α (-1 , 9)**
- Για $x_0=1$: $f(1)=1 \rightarrow$ **Β (1 , 1)**

Β3. Ο ρυθμός μεταβολής της f είναι η f'.

$f''(x) = 12x$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Ο ρυθμός μεταβολής της f γίνεται ελάχιστος για $x = 0$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. • $g'(x) = \left(\dfrac{x}{x^2+1}+1\right)' = \dfrac{(x^2+1) - x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$

• $g'(x_0) = \varepsilon\varphi 45^0 = 1 \Rightarrow \dfrac{1-x_0^{\,2}}{(x_0^{\,2}+1)^2} = 1 \Leftrightarrow$

$(x_0^{\,2}+1)^2 = 1 - x_0^{\,2} \Leftrightarrow x_0^{\,4} + 2x_0^{\,2} + \cancel{1} = \cancel{1} - x_0^{\,2} \Leftrightarrow$

$x_0^{\,4} + 3x_0^{\,2} = 0 \Leftrightarrow x_0^{\,2}(x_0^{\,2}+3) = 0 \overset{x_0^{\,2}+3\neq 0}{\Leftrightarrow} x_0^{\,2} = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0$

$f(0) = 1$ και $f'(0) = 1$, άρα

$(\varepsilon): y - f(0) = f'(0)\cdot(x-0) \Leftrightarrow y - 1 = x \Leftrightarrow \mathbf{y = x + 1}$

Γ2. $g'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

Η g είναι γνησίως φθίνουσα στα $(-\infty, -1]$ και $[1, +\infty)$, ενώ είναι γνησίως αύξουσα στο $[-1, 1]$. Η g παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για $x = -1$ την τιμή $g(-1) = 1/2$ ενώ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $x = 1$ την τιμή $g(1) = 3/2$.

Γ3. $x_i = -1\ ,\ 0\ ,\ x_3\ ,\ x_4$

- $M_1 \in \varepsilon \Leftrightarrow y_1 = x_1 + 1 = -1 + 1 = 0$
- $M_2 \in \varepsilon \Leftrightarrow y_2 = x_2 + 1 = 0 + 1 = 1$
- $M_3 \in \varepsilon \Leftrightarrow y_3 = x_3 + 1$
- $M_4 \in \varepsilon \Leftrightarrow y_4 = x_4 + 1$

Είναι $1 < x_3 < x_4$, άρα $y_1 < y_2 < y_3 < y_4$

$R_y = y_4 - y_1 \Leftrightarrow 5 = (x_4 + 1) - 0 \Leftrightarrow 5 = x_4 + 1 \Leftrightarrow \mathbf{x_4 = 4}$

- $\delta_{\omega_\kappa} = \dfrac{0 + x_3}{2} = \dfrac{x_3}{2}$
- $\delta_{y_\kappa} = \dfrac{1 + x_3 + 1}{2} = \dfrac{2 + x_3}{2}$

Είναι $2\delta_{\omega_\kappa} = \delta_{y_\kappa} \Leftrightarrow 2\dfrac{x_3}{2} = \dfrac{2 + x_3}{2} \overset{(\cdot 2)}{\Leftrightarrow} 2x_3 = 2 + x_3 \Leftrightarrow \mathbf{x_3 = 2}$

Γ4. ΣΧΟΛΙΟ :

Η μέση τιμή των τιμών x_1, x_2, x_3, x_4 είναι :
$\overline{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} = \dfrac{-1 + 0 + 2 + 4}{4} = \mathbf{\dfrac{5}{4}}$
Έπρεπε να ζητείται η μέση τιμή της μεταβλητής Χ

<u>Εύρεση της μέσης τιμής της μεταβλητής Χ που παίρνει τιμές x_1, x_2, x_3, x_4 με αντίστοιχες σχετικές συχνότητες f_1, f_2, f_3, f_4:</u>

- $f_1 = g(x_1) - \dfrac{1}{3} = g(-1) - \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} = \mathbf{\dfrac{1}{6}}$
- $f_2 = g(x_2) - \dfrac{1}{3} = g(0) - \dfrac{1}{3} = 1 - \dfrac{1}{3} = \mathbf{\dfrac{2}{3}}$
- $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{g'(x)}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\dfrac{-\cancel{(x-1)}(x+1)}{(x^2+1)^2}}{\cancel{x-1}} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{-(x+1)}{(x^2+1)^2} = \dfrac{-2}{4} = -\dfrac{1}{2}$

$$f_3 = -\frac{1}{6}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{g'(x)}{x-1} = -\frac{1}{6}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = \mathbf{\frac{1}{12}}$$

- $f_4 = 1 - f_1 - f_2 - f_3 = 1 - \frac{1}{6} - \frac{2}{3} - \frac{1}{12} = \mathbf{\frac{1}{12}}$

x_i	f_i	$x_i f_i$
$x_1 = -1$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$
$x_2 = 0$	$\frac{2}{3}$	0
$x_3 = 2$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$
$x_4 = 4$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$
Σύνολα	**1**	$\mathbf{\frac{1}{3}}$

$$\bar{x} = \sum x_i f_i = \mathbf{\frac{1}{3}}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $F_5 = 1$ και $F_5\% = 100$

Από τύπους Vieta έχουμε :

$$\begin{cases} F_3 + F_5 = \frac{8}{5} \\ F_3 \cdot F_5 = \frac{3\kappa}{5} \end{cases} \overset{F_5 = 1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} F_3 + 1 = \frac{8}{5} \\ F_3 = \frac{3\kappa}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F_3 = \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} = \frac{3\kappa}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F_3 = \frac{3}{5} \\ \boldsymbol{\kappa = 1} \end{cases}$$

$$F_5\% = 100 \Leftrightarrow \kappa\lambda^2 - 3\lambda + 30 = 100 \overset{\kappa = 1}{\Leftrightarrow} \lambda^2 - 3\lambda - 70 = 0$$

$\Delta = 289$ και $\lambda = 10$ ή $\lambda = -7$

Όμως $F_1\% = \lambda \geq 0$, άρα $\boldsymbol{\lambda = 10}$

Δ2. $f_1\% = F_1\% = \lambda = \mathbf{10}$

$F_2\% = 3\lambda + 10 = 40$

$f_2\% = F_2\% - F_1\% = 40 - 10 = \mathbf{30}$

$F_3\% = 100 \cdot F_3 = 60$

$f_3\% = F_3\% - F_2\% = 60 - 40 = \mathbf{20}$

$F_4\% = \kappa\lambda^2 - 2\lambda + 10 = 90$

$f_4\% = F_4\% - F_3\% = 90 - 60 = \mathbf{30}$

$f_5\% = F_5\% - F_4\% = 100 - 90 = \mathbf{10}$

Δ3. • $25\% = f_1\% + \dfrac{f_2\%}{2} \Rightarrow x_2 = 16$ **(1)**

• $25\% = \dfrac{f_4\%}{2} + f_5\% \Rightarrow x_4 = 24$ **(2)**

• $x_4 - x_2 = 2c \overset{(1)}{\underset{(2)}{\Leftrightarrow}} 2c = 8 \Leftrightarrow \mathbf{c = 4}$

1^{η} κλάση : [α , α + 4), 2^{η} κλάση : [α + 4 , α + 8)

$$x_2 = \frac{\alpha + 4 + \alpha + 8}{2} \Leftrightarrow 16 = \frac{2\alpha + 12}{2} \Leftrightarrow$$

$$2\alpha + 12 = 32 \Leftrightarrow 2\alpha = 20 \Leftrightarrow \mathbf{\alpha = 10}$$

Κλάσεις	Κεντρικές τιμές x_i	$f_i\%$	F_i	$F_i\%$
[10 , 14)	**12**	**10**	**0,1**	**10**
[14 , 18)	**16**	**30**	**0,4**	**40**
[18 , 22)	**20**	**20**	**0,6**	**60**
[22 , 26)	**24**	**30**	**0,9**	**90**
[26 , 30)	**28**	**10**	**1**	**100**
ΣΥΝΟΛΑ	**-**	**100**	**-**	**-**

Δ4. Το 40% των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες ή ίσες του 22.

Στο 40% των παρατηρήσεων αντιστοιχούν 800 παρατηρήσεις

<u>Στο 100% των παρατηρήσεων αντιστοιχούν ν παρατηρήσεις</u>

$40\nu = 800 \cdot 100 \Leftrightarrow 40\nu = 80000 \Leftrightarrow \mathbf{\nu = 2000}$

Επιμέλεια απαντήσεων: Φροντιστήρια ΄΄Κελάφας΄΄