ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΡΙΤΗ 26 ΜΑΪΟΥ 2009
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 279
2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 229

Β. **1.** Λ , **2.** Σ, **3.** Λ, **4.** Σ

ΘΕΜΑ 2ο

α. $z_2 = (1-i)^2 + 3i^{2009} + 1 = 1^2 - 2i + i^2 + 3(i^4)^{502}i + 1$

$= 1 - 2i - 1 + 3i + 1 = \mathbf{1+i}$

β. $\bar{z}_1 - z_2 = \overline{2+3i} - (1+i) = 2 - 3i - 1 - i = 1 - 4i$

$|\bar{z}_1 - z_2| = |1 - 4i| = \sqrt{1^2 + (-4)^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{\mathbf{17}}$

γ. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{2+3i}{1+i} = \dfrac{(2+3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \dfrac{2 - 2i + 3i - 3i^2}{1 - i^2}$

$= \dfrac{2 - 2i + 3i + 3}{1+1} = \dfrac{5+i}{2} = \mathbf{\dfrac{5}{2} + \dfrac{1}{2}i}$

ΘΕΜΑ 3ο

α. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (\alpha x^2 + \beta) = \alpha + \beta$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (2x + 3) = 5$

$f(1) = \alpha \cdot 1^2 + \beta = \alpha + \beta$

Για να είναι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$ πρέπει

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1) \Leftrightarrow \mathbf{\alpha + \beta = 5}$

β. $$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{\alpha x^2+\beta-(\alpha+\beta)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{\alpha x^2-\alpha}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1^-}\frac{\alpha(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\alpha(x+1)=2\alpha$$

$$\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{(2x+3)-(\alpha+\beta)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{2x+3-5}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1^+}\frac{2(x-1)}{x-1}=2$$

Για να είναι η f παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ πρέπει

$$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\Leftrightarrow 2\alpha=2\Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha=1}$$

$$\alpha+\beta=5\overset{\alpha=1}{\Rightarrow}1+\beta=5\Leftrightarrow\beta=5-1\Leftrightarrow\boldsymbol{\beta=4}$$

γ. Για $\alpha=1$ και $\beta=4$ είναι $g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+4}{x}, & x\in(-\infty,0)\cup(0,1)\\[2mm] \dfrac{2x+3}{x}, & x\in(1,+\infty)\end{cases}$

- στο $-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x^2+4}{x}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+4}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2}=1=\lambda$$

$$\lim_{x\to-\infty}[g(x)-\lambda x]=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2+4}{x}-x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+4-x^2}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{4}{x^2}=0=\beta$$

Η $(\varepsilon_1): y=x$ είναι η πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

- στο $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+3}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x}=2$$

Η $(\varepsilon_2): y=2$ είναι η οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

ΘΕΜΑ 4ο

I. $f'(x) = \left(x^3 + \lambda x^2 - 3x + 1\right)' = 3x^2 + 2\lambda x - 3,\ x \in IR$

Η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = 1$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$

Από Θ. Fermat έχουμε :

$f'(1) = 0 \iff 3 + 2\lambda - 3 = 0 \iff 2\lambda = 0 \iff \boldsymbol{\lambda = 0}$.

II.α. Για $\lambda = 0$ είναι :

$f(x) = x^3 - 3x + 1$ και $f'(x) = 3x^2 - 3$

$f'(x) = 0 \iff 3x^2 - 3 = 0 \iff x^2 = 1 \iff x = \pm 1$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗		↘		↗
		τ. μέγιστο		τ. ελάχιστο	

Η f είναι γνησίως αύξουσα στα $(-\infty , -1]$ και $[1 , +\infty)$, ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-1 , 1]$.

Η f παρουσιάζει **τοπικό μέγιστο** για $x = -1$ την τιμή
$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 1 = -1 + 3 + 1 = \mathbf{3}$

Η f παρουσιάζει **τοπικό ελάχιστο** για $x = 1$ την τιμή
$f(1) = 1^3 - 3 + 1 = 1 - 3 + 1 = \mathbf{-1}$

β. Πρέπει $f'(x) = 9 \iff 3x^2 - 3 = 9 \iff 3x^2 = 12 \iff x^2 = 4 \iff x = \pm 2$

- $x_0 = -2$

  $y_0 = f(-2) = (-2)^3 - 3(-2) + 1 = -8 + 6 + 1 = -1$

  $(\varepsilon_1) : y - y_0 = \lambda(x - x_0) \iff (\varepsilon_1) : y + 1 = 9(x + 2) \iff \boldsymbol{(\varepsilon_1) : y = 9x + 17}$

- $x_0 = 2$

  $y_0 = f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2 + 1 = 8 - 6 + 1 = 3$

  $(\varepsilon_2) : y - y_0 = \lambda(x - x_0) \iff (\varepsilon_2) : y - 3 = 9(x - 2) \iff \boldsymbol{(\varepsilon_2) : y = 9x - 15}$

γ. Θεωρούμε τη συνάρτηση g, με $g(x) = f(x) - \sqrt{x}$, $x \in [0 , 1]$

- η g είναι συνεχής στο $[0 , 1]$, ως διαφορά συνεχών
- $g(0) = f(0) = 1 > 0$
- $g(1) = f(1) - 1 = -1 - 1 = -2 < 0$

Από Θ. Bolzano **η εξίσωση** $g(x) = 0 \iff \boldsymbol{f(x) - \sqrt{x} = 0}$
έχει μια τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(0 , 1)$.