ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 3 ΙΟΥΛΙΟΥ 2008
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 335
Α.2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 247
Β. α. Σωστό
β. Λάθος
γ. Σωστό
δ. Λάθος
ε. Σωστό

ΘΕΜΑ 2ο

α. *1ος τρόπος*

Αν $z_1 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$ είναι η μια ρίζα της εξίσωσης $z^2+\beta z+\gamma=0$,

η άλλη ρίζα είναι η $z_2 = \dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$.

Τύποι Vieta

$$\left.\begin{aligned} S &= z_1+z_2 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}+\frac{1-i\sqrt{3}}{2} = 1 \\ S &= \frac{-\beta}{\alpha} = \frac{-\beta}{1} = -\beta \end{aligned}\right\} \Rightarrow -\beta = 1 \Leftrightarrow \boldsymbol{\beta = -1}$$

$$\left.\begin{aligned} P &= z_1\cdot z_2 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1-i\sqrt{3}}{2} = \frac{1+3}{4} = 1 \\ P &= \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\gamma}{1} = \gamma \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{\gamma = 1}$$

2^{ος} τρόπος

Αν $z_1 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$ είναι η ρίζα της εξίσωσης $z^2 + \beta z + \gamma = 0$, τότε

$$\left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \beta \cdot \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} + \gamma = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1 + 2\sqrt{3}i - 3}{4} + \beta \cdot \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} + \gamma = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} + \frac{\beta + \beta\sqrt{3}i}{2} + \gamma = 0 \Leftrightarrow$$

$$-1 + \sqrt{3}i + \beta + \beta\sqrt{3}i + 2\gamma = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\beta + 2\gamma - 1) + (\beta\sqrt{3} + \sqrt{3}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \beta\sqrt{3} + \sqrt{3} = 0 \\ \beta + 2\gamma - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \beta = -1 \\ \beta + 2\gamma - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{\beta = -1} \\ \boldsymbol{\gamma = 1} \end{cases}$$

β. Το z_1 είναι ρίζα της εξίσωσης $z^2 - z + 1 = 0$, άρα $z_1^2 - z_1 + 1 = 0$

$1^{ος}$ τρόπος

$$(z_1 + 1)(z_1^2 - z_1 + 1) = 0 \Leftrightarrow z_1^3 + 1 = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{z_1^3 = -1}$$

$2^{ος}$ τρόπος

$$z_1^2 - z_1 + 1 = 0 \Leftrightarrow z_1^2 = z_1 - 1 \ \textbf{(1)}$$

$$\textbf{(1)} \Rightarrow z_1^3 = z_1^2 \cdot z_1 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} z_1^3 = z_1 - 1 - z_1 \Leftrightarrow \boldsymbol{z_1^3 = -1}$$

$3^{ος}$ τρόπος

$$z_1^2 - z_1 + 1 = 0 \Rightarrow \left.\begin{cases} z_1 \cdot (z_1 - 1) = -1 \\ z_1^2 = z_1 - 1 \end{cases}\right\} \Rightarrow z_1 \cdot z_1^2 = -1 \Leftrightarrow \boldsymbol{z_1^3 = -1}$$

$4^{ος}$ τρόπος

$$z_1^3 = \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{(1 + i\sqrt{3})^3}{8} = \frac{1 + 3\sqrt{3}i + 3(\sqrt{3}i)^2 + (\sqrt{3}i)^3}{8}$$

$$= \frac{1 + 3\sqrt{3}i - 9 - 3\sqrt{3}i}{8} = \frac{-8}{8} = -1$$

γ. $|w| = |z_1 - \bar{z}_1| \Leftrightarrow |w| = |2\mathrm{Im}(z_1)\cdot i| \Leftrightarrow$

$|w| = \left|2\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot i\right| \Leftrightarrow |w| = \sqrt{3}$

Άρα ο γ.τ. των εικόνων του w είναι

ο κύκλος με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho = \sqrt{3}$.

ΘΕΜΑ 3ο

α. $f'(x) = (x^2 - 2\ell n x)' = 2x - \dfrac{2}{x} = \dfrac{2x^2 - 2}{x},\ x > 0$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{2x^2 - 2}{x} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = 2 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x = 1$

x	0		1		+∞
f (x)		-	0	+	
f (x)		↘		↗	

Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $f(1) = 1$, άρα

$f(x) \geq f(1) \Leftrightarrow$ **$f(x) \geq 1$, για κάθε $x > 0$.**

β. • $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(x^2 - 2\ell n x) = +\infty$

άρα έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία **$x = 0$ ($y'y$)**.

• $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2 - 2\ell n x}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty}\left(x - 2\dfrac{\ell n x}{x}\right) = +\infty$, διότι

$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ell n x}{x} \underset{\text{L'Hospital}}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{(\ell n x)'}{(x)'} = \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{x} = 0$ και $\lim\limits_{x\to +\infty} x = +\infty$.

άρα δεν έχει οριζόντιες ή πλάγιες ασύμπτωτες.

γ.i. $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ell n x}{f(x)} \underset{\text{L'Hospital}}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}} \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{f'(x)} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{2x - \frac{2}{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{2x^2 - 2} = -\dfrac{1}{2}$

$g(0) = k$

Για να είναι η g συνεχής στο $x_0 = 0$ πρέπει $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = g(0) \Leftrightarrow$

$k = -\dfrac{1}{2}$.

γ.ii. • η g είναι συνεχής στο [0 , e]

• $g(0) = -\frac{1}{2} < 0$

$g(e) = \frac{\ell ne}{f(e)} = \frac{1}{e^2 - 2} > 0$

$\Rightarrow g(0) \cdot g(e) < 0$

Από Θ. Bolzano

υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της $g(x) = 0$ στο $(0, e)$.

ΘΕΜΑ 4ο

α. $\int_0^1 e^{t-1} \cdot [f(t) + F(t)]\,dt = \int_0^1 e^{t-1} \cdot [F'(t) + F(t)]\,dt$

$= \int_0^1 [e^{t-1} \cdot F'(t) + e^{t-1} \cdot F(t)]\,dt$

$= \int_0^1 [e^{t-1} \cdot F(t)]'\,dt$

$= \left[e^{t-1} \cdot F(t)\right]_0^1$

$= e^0 \cdot F(1) - e^{-1} \cdot F(0)$

$= 1 \cdot F(1) - e^{-1} \cdot 0$

$= F(1)$

$$F'(x) = \left[\int_0^x f(x)\,dx\right]' = f(x)$$

β. Για $x > 0$ είναι :

$$h'(x) = \left(\frac{F(x)}{\int_0^x t \cdot f(t)dt}\right)'$$

$$= \frac{F'(x) \cdot \int_0^x t \cdot f(t)dt - F(x) \cdot \left[\int_0^x t \cdot f(t)dt\right]'}{\left[\int_0^x t \cdot f(t)dt\right]^2}$$

$$= \frac{f(x) \cdot \int_0^x t \cdot f(t)dt - F(x) \cdot x \cdot f(x)}{\left[\int_0^x t \cdot f(t)dt\right]^2}$$

$$= \frac{f(x) \cdot \left[\int_0^x t \cdot f(t)dt - x \cdot F(x)\right]}{\left[\int_0^x t \cdot f(t)dt\right]^2} < 0, \text{ διότι}$$

- $f(x) > 0$
- $\left[\int_0^x t \cdot f(t)dt\right]^2 > 0$
- Θεωρούμε τη συνάρτηση φ, με

$$\varphi(x) = \int_0^x t \cdot f(t)dt - x \cdot F(x),\ x \geq 0$$

Είναι
$$\varphi'(x) = \left[\int_0^x t \cdot f(t)dt - x \cdot F(x)\right]'$$
$$= x \cdot f(x) - F(x) - x \cdot F'(x)$$
$$= x \cdot f(x) - F(x) - x \cdot f(x) = -F(x) < 0$$

διότι $f(x) > 0$ και $F(x) = \int_0^x f(t)dt > 0$, για $x > 0$

Επομένως η φ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$

Για $x > 0 \overset{\varphi\downarrow}{\Leftrightarrow} \varphi(x) < \varphi(0) \Leftrightarrow \int_0^x t \cdot f(t)dt - x \cdot F(x) < 0$

γ. $2 > 1 \overset{h\downarrow}{\Leftrightarrow} h(2) < h(1) \Leftrightarrow \dfrac{F(2)}{\int_0^2 t \cdot f(t)dt} < 2 \Leftrightarrow \dfrac{\int_0^2 f(t)dt}{\int_0^2 t \cdot f(t)dt} < 2$

και επειδή $\int_0^2 t \cdot f(t)dt > 0$, αφού $f(x) > 0$ και $2 > 0$

$$\int_0^2 t \cdot f(t)dt \cdot \frac{\int_0^2 f(t)dt}{\int_0^2 t \cdot f(t)dt} < 2 \cdot \int_0^2 t \cdot f(t)dt \Leftrightarrow$$

$$\int_0^2 f(t)dt < 2\int_0^2 t \cdot f(t)dt$$

δ. $h(1) = 2 \Leftrightarrow \dfrac{F(1)}{\int_0^1 t \cdot f(t)dt} = 2 \Leftrightarrow \int_0^1 t \cdot f(t)dt = \dfrac{F(1)}{2}$ **(1)**

Είναι
$$\int_0^1 F(t)dt = \int_0^1 (t)' \cdot F(t)dt = [t \cdot F(t)]_0^1 - \int_0^1 t \cdot F'(t)dt$$
$$= F(1) - \int_0^1 t \cdot f(t)dt \overset{(1)}{=} F(1) - \frac{F(1)}{2} = \frac{F(1)}{2}$$