ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΤΕΤΑΡΤΗ 31 ΜΑΙΟΥ 2006 ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Θεωρία

Β. $1 \to$ Λ, $2 \to$ Σ, $3 \to$ Σ, $4 \to$ Λ, $5 \to$ Λ, $6 \to$ Σ

ΘΕΜΑ 2ο

α. $\Delta = (-4)^2 - 4\cdot 13 = 16 - 52 = -36$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm i6}{2} = \begin{cases} 2+3i \\ 2-3i \end{cases}$$

β. Έστω $z_1 = 2+3i, \quad z_2 = 2-3i$

$$|z_1| = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1|\cdot|z_2| = 13$$

$$|\bar{z}_2| = |z_2| = \sqrt{13}$$

$$i^{2006} = i^{4\cdot 501+2} = \left(i^4\right)^{501} \cdot i^2 = -1$$

Άρα $A = 13 - 2\cdot 13 + 13 - 1 = -1$

γ. α τρόπος:

Η σχέση γίνεται: $|z-(2+3i)| = 5$ άρα είναι κύκλος κέντρου $K(2,3)$ και ακτίνας $R=5$.

β τρόπος:

$$|x+yi-2-3i| = 5 \Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2} = 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2+(y-3)^2 = 5^2 \to K(2,3), \quad R=5$$

ΘΕΜΑ 3ο

Ι. $x<1$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1}\left(-\frac{3}{4}x+\lambda\right) = -\frac{3}{4}+\lambda$$

$x>1$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2-8x+4}{4x}\right) = \frac{1-8+4}{4} = -\frac{3}{4}, \quad f(1) = -\frac{3}{4}+\lambda$$

Για να είναι συνεχής η f στο $x_0 = 1$ θα πρέπει να ισχύει

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^+} f(x) = f(1) \quad ή \quad = -\frac{3}{4} + \lambda = -\frac{3}{4} \Leftrightarrow \lambda = 0$$

II.

α. $f(x) = \begin{cases} -\frac{3}{4}x, & x \le 1 \\ \frac{x^2-8x+4}{4x} & x > 1 \end{cases}$

$x < 1$

$$\lim_{x\to1-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to1} \frac{-\frac{3}{4}x + \frac{3}{4}}{x-1} = -\frac{3}{4}$$

$x > 1$

$$\lim_{x\to1+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to1} \frac{\lim_{x\to1} \frac{x^2-8x+4}{4x} + \frac{3}{4}}{x-1} = \lim_{x\to1} \frac{x^2-5x+4}{4x(x-1)} = \lim_{x\to1} \frac{(x-4)(x-1)}{4x(x-1)} = -\frac{3}{4}$$

Επειδή $\lim_{x\to1-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to1+} = \frac{f(x)-f(1)}{x-1} - \frac{3}{4}$ η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$

Ακόμη η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty,1)$ ως πολυωνυμική και στο $(1,+\infty)$ ως ρητή. Συνεπώς η f είναι παραγωγίμη στο R.

ΘΕΜΑ 4ο

I. Πρέπει $f'(1) = 0$ είναι $f'(x) = 6x^2 - 2\kappa x$

$f'(1) = 0$ ή $6 - 2\kappa = 0$

$-2\kappa = -6$

$\kappa = 3$

II. Για $\kappa = 3$

α. $f(x) 2x^3 - 3x^2 + 10$

$f'(x) = 6x^2 - 6x$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad ή \quad x = 1$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$		↗	ΤΜ 10	↘	ΤΕ 9	↗	

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0]$
Είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,1]$
Είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$
Για $x=0$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το $f(0)=10$
Για $x=1$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το $f(1)=9$

β. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(2x^3-3x^2+10)=-\infty,\quad f(0)=10$
Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $(-\infty,0]$ το σύνολο τιμών της είναι το $\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), f(0)\right]$ δηλ το $(-\infty,10]$

γ. $f(x)=\alpha-5$ ή $2x^3-3x^2+10=\alpha-5 \Leftrightarrow 2x^3+15-\alpha=0$
Έστω $h(x)=2x^3-3x^2+15-\alpha,\quad x\in R$
$h'(x)=6x^2-6x$
$h'(x)<0$ για κάθε $x\in(0,1)$ όποτε η h είναι γνησίως φθίνουσα άρα και 1-1.
Οπότε έχει η $h(x)=0$ ή $f(x)=\alpha-5$ το πολύ μία λύση στο $(0,1)$ (1)
$\lim\limits_{x\to0^+} h(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(2x^3-3x^2+15-\alpha)=15-\alpha>0$

$\lim\limits_{x\to1^-} h(x)=\lim\limits_{x\to1^-}(2x^3-3x^2+15-\alpha)=14-\alpha<0$

Διότι 14 <α <15

Άρα 14-α < 0 και 15-α > 0

Η h ακόμη είναι συνεχής στο $[0,1]$ και $h(0)\cdot h(1)<0$ όποτε από Θ. Bolzano η $h(x)=0$ δηλαδή $f(x)=\alpha-5,\ \alpha\in(14,15)$ έχει τουλάχιστον μία λύση στο $(0,1)$ (2).
Λόγω των (1), (2) προκύπτει ότι η εξίσωση $f(x)=\alpha-5,\quad \alpha\in(14,15)$ έχει ακριβώς μία λύση στο $(0,1)$.